漸化式 $a_{n+1}=ka_n+f(n)$ の一般項を求める統一的解法について

横山（よこやま）　政道（まさみち）

§1　はじめに

例えば，$a_n=2a_n+1$ のタイプを解くとき階差数列を利用する考え方と等比数列に帰着させる考え方の２通りありますが，後者の考え方ですべて求めることができます。後者の考え方はご存じの通り $\{a_n\}$ の各項にある数を足したり引いたりして等比数列を作ることが基本です。それでは一般的に解説します。

$a_{n+1}=ka_n+f(n)$ を次のように変形します。

$a_{n+1}-g(n+1)=k\{a_n-g(n)\}$

数列 $\{a_n-g(n)\}$ は，初項 $a_1-g(1)$，公比 k の等比数列より，$a_n=\{a_1-g(1)\}\cdot k^{n-1}+g(n)$

ここで問題になってくるのは関数 $g(n)$ の決定の仕方ですが，具体例を通じて考察していきます。

§2　具体例

$f(n)$ が指数形をしている場合，$\boldsymbol{g(n)=p^n(cn+d)}$ （c，d は定数）とおく。

問題１　$\boldsymbol{a_1=1}$，$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n+3^n}$

$a_{n+1}-g(n+1)=2\{a_n-g(n)\}$

$g(n)=3^n(cn+d)$ とおくと

$$g(n+1)-2g(n)=3^{n+1}\{c(n+1)+d\}-2\cdot3^n(cn+d)$$
$$=3^n(cn+3c+d)$$

これが 3^n と一致するので，$cn+3c+d=1$

n についての恒等式より　$c=0$，$d=1$

よって，$g(n)=3^n$ である。したがって，

$a_n=\{a_1-g(1)\}\cdot2^{n-1}+3^n$ から $a_n=3^n-2^n$

問題２　$\boldsymbol{a_1=1}$，$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+3^n}$

$g(n)=3^n(cn+d)$ とおくと

$$g(n+1)-g(n)=3^{n+1}\{c(n+1)+d\}-3^n(cn+d)$$
$$=3^n(2cn+3c+2d)$$

これが 3^n と一致するので，$2cn+3c+2d=1$

$2c=0$ かつ $3c+2d=1$ より $c=0$，$d=\frac{1}{2}$

よって，$g(n)=\frac{1}{2}\times3^n$ より

$a_n=\{a_1-g(1)\}+g(n)=1-\frac{3}{2}+\frac{3^n}{2}=\frac{3^n-1}{2}$

$f(n)$ が n の多項式の形をしている場合，n が１次式の場合は $\boldsymbol{g(n)=(An+B)n+C}$ とおく。 特に，a_n の係数が１でないとき $A=0$ である。

問題３　$\boldsymbol{a_1=1}$，$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n+n}$

$A=0$ を $g(n)$ の式に代入して $g(n)=Bn+C$

$g(n)=Bn+C$ で考えていきます。

$a_{n+1}-B(n+1)-C=2(a_n-Bn-C)$

$a_{n+1}=2a_n-Bn+B-C$

与式と比べて　$B=-1$，$C=-1$

$a_{n+1}+(n+1)+1=2(a_n+n+1)$

$\{a_n+n+1\}$ は初項 $a_1+1+1=3$，公比２の等比数列より，$a_n+n+1=3\cdot2^{n-1}$ よって $a_n=3\cdot2^{n-1}-n-1$

問題４　$\begin{cases}\boldsymbol{a_1=1}\\ \boldsymbol{a_{n+1}=a_n+\dfrac{n(n+1)}{2}}\end{cases}$

$g(n)=An^3+Bn^2+Cn$ とおくと（定数項は省略）

$3A=\frac{1}{2}$，$3A+2B=\frac{1}{2}$，$A+B+C=0$

$\therefore$　$A=\frac{1}{6}$，$B=0$，$C=-\frac{1}{6}$

よって，$a_n=\{a_1-g(1)\}+g(n)$

$$=(1-0)+\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{6}n=\frac{1}{6}(n+2)(n^2-2n+3)$$

《参考文献》

数学オリンピック事典　野口 廣監修　朝倉書店

（宮崎県立宮崎南高等学校）