平行移動を回転で

ー三角関数の公式の覚え方ー

楠田（くすだ）　貴至（たかし）

§0．はじめに

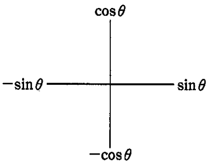
「数学II」では，三角関数の公式がたくさん出てきて生徒は混乱する。sin が cos に変わったり，符号が変わったりで覚えようとすると大変である。

もっとも「数学Ｉ」の三角比でも　「余角」「補角」等の公式は出てきている。もちろん理屈がわかっていれば何も覚えるものではないのだが，覚えることによって習熟し，改めてなぜそうなるのだろうと問い直すのも悪くはないと考える。

以下，$\sin\theta$，$\cos\theta$ について述べ，$\tan\theta$ については後述する。

§1．「sin クロス」

唐突であるが，右のような図を用意する。

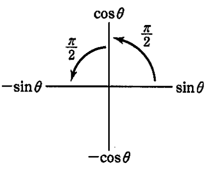


sinのグラフを「sin カーブ」と言うのに対し，これをもじって，この図を「sin クロス」と名づける。

以下，これを使って説明する。

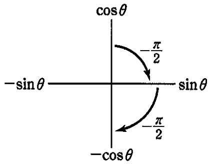
§2．$\theta\pm\frac{\pi}{2}$ の公式

$$\begin{cases}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta\\ \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta\end{cases}$$



右の図のように，$\sin\theta$ のところから $\frac{\pi}{2}$ 回転させると $\cos\theta$ になる。同様に，$\cos\theta$ のところから $\frac{\pi}{2}$ 回転させると $-\sin\theta$ になる。

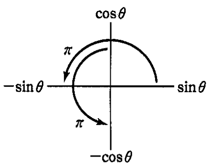
$$\begin{cases}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta\\ \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta\end{cases}$$



右の図のように，$\sin\theta$ のところから $-\frac{\pi}{2}$ 回転させると $-\cos\theta$ になる。同様に，$\cos\theta$ のところから $-\frac{\pi}{2}$ 回転させると $\sin\theta$ になる。

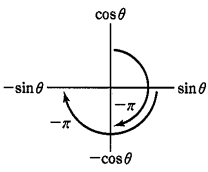
§3．$\theta\pm\pi$ の公式

$$\begin{cases}\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta\\ \cos(\theta+\pi)=-\cos\theta\end{cases}$$



右の図のように，$\sin\theta$ のところから π 回転させると $-\sin\theta$ になる。同様に，$\cos\theta$ のところから π 回転させると $-\cos\theta$ になる。

$$\begin{cases}\sin(\theta-\pi)=-\sin\theta\\ \cos(\theta-\pi)=-\cos\theta\end{cases}$$

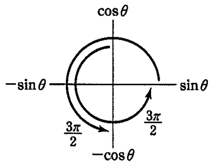


右の図のように，$\sin\theta$ のところから $-\pi$ 回転させると $-\sin\theta$ になる。同様に，$\cos\theta$ のところから $-\pi$ 回転させると $-\cos\theta$ になる。

§4．$\theta\pm\frac{3\pi}{2}$ の公式

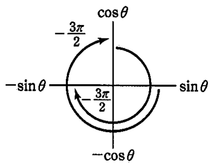
$$\begin{cases}\sin\left(\theta+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\cos\theta\\ \cos\left(\theta+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin\theta\end{cases}$$

右の図のように，$\sin\theta$ のところから $\frac{3\pi}{2}$ 回転させると $-\cos\theta$ になる。同様に，$\cos\theta$ のところから $\frac{3\pi}{2}$ 回転させると $\sin\theta$ になる。



$$\begin{cases}\sin\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos\theta\\ \cos\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\sin\theta\end{cases}$$

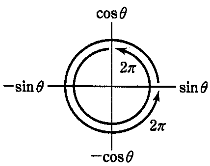
右の図のように，$\sin\theta$ のところから $-\frac{3\pi}{2}$ 回転させると $\cos\theta$ になる。同様に，$\cos\theta$ のところから $-\frac{3\pi}{2}$ 回転させると $-\sin\theta$ になる。

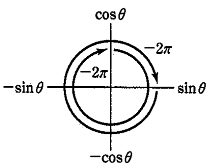


§5．$\theta+2n\pi$ の公式

$$\begin{cases}\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta\\ \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta\end{cases}\quad(\text{ただし，}n\text{ は整数})$$

これは特に説明しなくてもよいであろう。
ぐるっと，n 周回ってきて元の所に帰ってくる。
何周回ろうと同じである。
n が負の時は，逆周りに n 周。
$n=0$ の時は明らか。





§6．負角の公式

負角の公式 $\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\end{cases}$ は，平行移動ではないので「sin クロス」は使えない。

しかし，以下に見るように「余角の公式」や「補角の公式」を「sin クロス」でやる場合には必要となるので，定義に戻ってしっかり理解しておく。

§7．余角の公式

余角の公式 $\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\end{cases}$ は

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから，「sin クロス」で，$\theta=-\theta$ と見て $\frac{\pi}{2}$ 回転させると，

$$\sin\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-\theta)$$

である。ここで，負角の公式を使うと，
$\cos(-\theta)=\cos\theta$ ということになる。

つまり，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)$
$\qquad=\cos(-\theta)$
$\qquad=\cos\theta$

同様に，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから，「sin クロス」で，$\theta=-\theta$ と見て π 回転させると，

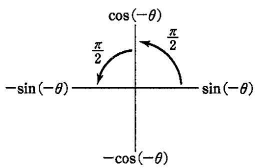
$$\cos\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(-\theta)$$

である。ここで，負角の公式を使うと

$$-\sin(-\theta)=-(-\sin\theta)=\sin\theta$$

ということになる。

つまり，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)$
$\qquad=-\sin(-\theta)$
$\qquad=\sin\theta$



§8．補角の公式

補角の公式 $\begin{cases}\sin(\pi-\theta)=\sin\theta \\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\end{cases}$ は

$$\sin(\pi-\theta)=\sin(-\theta+\pi)$$

であるから，「sin クロス」で，$\theta=-\theta$ と見て π 回転させると，

$$\sin(-\theta+\pi)=-\sin(-\theta)$$

になる。ここで，負角の公式を使うと

$$-\sin(-\theta)=-(-\sin\theta)=\sin\theta$$

ということになる。

つまり，$\sin(\pi-\theta)=\sin(-\theta+\pi)$
$=-\sin(-\theta)$
$=\sin\theta$

同様に，

$$\cos(\pi-\theta)=\cos(-\theta+\pi)$$

であるから，「sin クロス」で，$\theta=-\theta$ と見て π 回転させると，

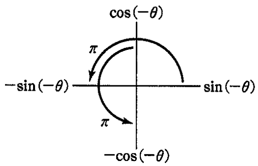
$$\cos(-\theta+\pi)=-\cos(-\theta)$$

になる。ここで，負角の公式を使うと

$$-\cos(-\theta)=-\cos\theta$$

ということになる。

つまり，$\cos(\pi-\theta)=\cos(-\theta+\pi)$
$=-\cos(-\theta)$
$=-\cos\theta$



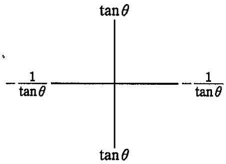
§9．tan θ の公式

$\tan\theta$ については，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ の関係があるので，例えば，

$$\tan(\theta+\pi)=\frac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=-\frac{1}{\tan\theta}$$

のように，sin と cos に分けてやればよい。もっとも，「tan クロス」が考えられないわけではないが，あまり面白くない。



もちろん，sin や cos と同じように，

負角の公式　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

を，理解していないと

余角の公式　$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$　や

補角の公式　$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$　をこの

「tan クロス」を使って説明することはできない。

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left(-\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$　であるから，

「tan クロス」で，$\theta=-\theta$ と見て $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させると

$\tan\left(-\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan(-\theta)}$　になる。

ここで，負角の公式を使うと

$-\dfrac{1}{\tan(-\theta)}=-\dfrac{1}{-\tan\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$　ということになる。

§10．おわりに

「sin クロス」は，数学 I の「余角の公式」「補角の公式」についても使えるということであって，その有効性はむしろ，数学IIの公式にある。上の公式にない場合でも「sin クロス」を使えば，容易に求めることができる。見たこともないたくさんの公式に出会っても，引くことなく頑張って進んでもらいたいという思いがある。もちろん，数学が暗記科目だという意見には大反対の立場である。

(兵庫県立武庫荘総合高等学校)