生徒の素朴な質問に思うこと
―数列の極限の問題から―

西元（にしもと） 教善（のりよし）

§1．はじめに

数学Ⅲの最初にある「数列の極限」は，無限を扱う面白さと同時にその対応に戸惑う初学者も多いようである。つまり，いろいろなパターンがあるから，慣れないうちはその使い分けの判断が難しく思われるようである。

たとえば，$\infty+\infty$，$\infty\times\infty$ という無限大同士の和・積はまた無限大であることの正しさには感覚的にも納得できるが，その差・商については一見正しそうな $\infty-\infty=0$，$\infty\div\infty=1$ は正しくはなく，その極限を正しく求めるにはそれなりの対応をとらなければいけないからである。また，$\infty\times0$ についても同様である。

いわゆる不定形において，見かけは酷似しているのにもかかわらず，別種の対応をしなければならない時には，混乱の度が増すようである。

本稿では，初学者が疑問を抱きやすい問題を題材に，そこに思うことを述べてみたい。

§2．A君の質問から

よくある問題であるが，一般項が次のような数列の極限を調べよというのがある。

(1) $\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}$	(2) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(1)の解答は，まず与式を $\sqrt{n}$ でくくり出して $\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-1\right)$ として，$n\to\infty$ のとき

$$\sqrt{n}\to\infty,\quad \sqrt{2+\frac{1}{n}}-1\to\sqrt{2}-1>0$$

であることから

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n})=\infty$$

を導いてある。

一方，(2)の解答は，まず与式を $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}$ とみて，その分母・分子に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ を掛けることで，分子の有理化を行って $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ と変形し，分子が正の定数，$n\to\infty$ のとき（分母）$\to\infty$ ということから

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$$

を導いてある。

「(1)(2)ともに式自体がよく似ていて，そのままで極限を考えれば $\infty-\infty$ という不定形である。また，それぞれについての解決のメカニズムもわかるのであるが，なぜその対応の仕方に大きな違いがあるのか，その理由がよくわからない。」とA君は言うのである。解説をフォローするだけならばどうにかなるのであるが，(1)(2)が同時に列挙されるとどう対応するか，その判断が難しいようなのである。

そこには彼がパターンを憶え，それにあてはめることで問題を解決しようとする性癖が災いしている節もある。ちょっとしたことであるが，(1)には(2)での方法を，(2)には(1)での方法を用いて，不具合があればその方法の限界を，解決できればその適切さを考えてみようという姿勢があれば，と思うのである。

§3．一般化して考える

しかし，せっかく質問に来たのであるから，(1)(2)を(3)のように一般化して，その極限を一緒に調べてみることにした。一般化すると，かえって難しくなるという傾向もあるが，問題を特化することで，その問題の構造や本質が見えづらいことも往々にしてあるから，そのようにしてみた。

(3) $\sqrt{kn+1}-\sqrt{n}$（ただし，$k>0$）

ここで，(1)の流儀で $\sqrt{n}$ でくくり出して $\sqrt{n}\left(\sqrt{k+\frac{1}{n}}-1\right)$ として，$n\to\infty$ のとき

$$\sqrt{n} \to \infty$$

$$\sqrt{k+\frac{1}{n}}-1 \to \sqrt{k}-1 \begin{cases} >0 & (k>1) \\ =0 & (k=1) \\ <0 & (0<k<1) \end{cases}$$

であることから，

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{kn+1}-\sqrt{n})=\begin{cases} \infty & (k>1) \\ \infty\times 0 \text{ の不定形} & (k=1) \\ -\infty & (0<k<1) \end{cases}$$

となる。

(1)は $k=2$ の場合であるから，その極限は∞である。また，(2)は $k=1$ の場合であり，このときは $\infty\times 0$ の不定形になる。従って，(2)では(1)の方法はうまく機能しないが，そのことをA君はわかってくれたようである。

しかし，定期考査で出題された(2)において，$\sqrt{n}$ でくくり出して $n\to\infty$ のとき，$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \to 0$ であることから，この極限を0であると答えた解答が少なからずあった。それは，0は掛ければ何でも0にするというスタンスによるものである。

さて，うまく機能しなければ別の方針をとらざるを得ないが，それが「分母の有理化」であることを悟ったA君は即座に(3)の極限を求めるには，

『$k>0$，$k\neq 1 \longrightarrow \sqrt{n}$ でくくり出す

$k=1 \longrightarrow$ 分子の有理化を行う』

というパターンを発見して有頂天になっていた。

しかし，そこへそれまで聞き耳を立てていたBさんが「分子の有理化をすれば，それだけで極限が求められますよ。」と「くくり出し」「有理化」の2本立てに異論を唱えてきた。

A君は少しムッとした様子であったが，それでもそれを確かめるべく(3)の式を有理化し始めた。

$$\sqrt{kn+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{kn+1}-\sqrt{n})(\sqrt{kn+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{kn+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{(k-1)n+1}{\sqrt{kn+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{(k-1)\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{k+\frac{1}{n}}+1}$$

$$\to \begin{cases} \infty & (k>1) \\ 0 & (k=1) \quad (n\to\infty) \\ -\infty & (0<k<1) \end{cases}$$

確かに，「くくり出し」と「分子の有理化」の両方を必要とするA君の解法パターンより「分子の有理化」だけで済むBさんの方が手順としてシンプルである。結局(1)(2)はともに「分子の有理化」という方針で，統一的にその極限が求められることがわかった。

ただし，通常(1)は「くくり出し」で求めてある。個々の問題としては，この方法のほうがシンプルであるからである。しかし，このことが逆にA君を迷わせたようである。初心者A君には酷似した問題に異なる手法をとるその理由が見えてこなかったのであった。

§4．まとめ

さて，このように，ここで扱ったものは極めて簡単な極限を求める問題ではあったが，単に別個の方法をとるという態度ではなくちょっとした一般化をすることで，それらの統一的な扱いができること，また，「くくり出し」と「有理化」という別方針をとった裏にはその理由があることが見えてくる。

確かに，このタイプの問題にはこの方法をとるという「解法のパターン」を身につけることも重要であるが，何かしら機械的に操作・作業をしているだけであるとか，そこに数学的思考や理解，「はてな」と思う心が不在であることはよくないと思う。

参考書の解説でも，「…をくくり出す」，「…で分母・分子を割る(掛ける)」というように解法の指示があるが，それに誘導されて答えに至るだけでなく，なぜそうすればよいのか，なぜこうしてはうまくいかないのかが，つまりhowだけでなくwhyも適切に説明されていればよいのではないかと思う。A君の質問からその思いを新たにした次第である。

《参考文献》

〔1〕 エスコート　数学Ⅲ＋C　啓林館

〔2〕 チャート式解法と演習　数学Ⅲ＋C　数研出版

(山口県立岩国高等学校)