1次分数漸化式の初期値について

—逆漸化式の利用—

石濱（いしはま）　文武（ふみたけ）

§1．問題の発端

初期値 $a_1=1$,

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)　(1.1)

で定まる数列 $\{a_n\}$ については周知のように

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-2}\right\}$ が等差数列をなすことから

$$a_n=2-\frac{1}{n}$$

であることが分かります。

ところが，初期値を換えて

$$a_1=\frac{7}{3},\ a_{n+1}=\frac{a_n-4}{a_n-3}\ (n=1, 2, 3, \cdots)\quad (1.2)$$

とすると

$$a_2=\frac{5}{2},\ a_3=3$$

となり，a_4 が存在しません。この例は特性根が重解の場合（放物型）ですが，特性根が異なる場合（双曲型）についても同様の現象が起こります。

初期値 $a_1=1$,

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-6}{a_n-4}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)　(1.3)

で定まる数列 $\{a_n\}$ について

数列 $\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-3}\right\}$ が等比数列をなすことから

$$a_n=\frac{2^{n+1}-3}{2^n-1}$$

であることが分かります。ところが，初期値を換えて

$$a_1=\frac{46}{15},\ a_{n+1}=\frac{a_n-6}{a_n-4}\ (n=1, 2, 3, \cdots)\ (1.4)$$

とすると

$$a_2=\frac{22}{7},\ a_3=\frac{10}{3},\ a_4=4$$

となり，a_5 が存在しません。

このようにして，1次分数漸化式（メービウス変換）で数列を定義するためには，通常知られている初期値の条件（初期値は特性根に等しくない）以外に必要な条件（すべての n について a_n が漸化式の分母を0にしないように初期値をとる）があることが分かりました。本稿ではこの問題を追究します。

§2．問題の設定

1次分数漸化式の一般形は

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}\ (p,\ q,\ r,\ s \text{ は定数})\qquad (2.1)$$

ですが，ここでは以下で，特殊な場合を除去します。まず，$r=0$ とすると (2.1) の右辺が整1次式になってしまうので

$$r\neq 0\qquad (2.2)$$

とします。また，$ps-qr=0$ とすると (2.1) の右辺が定数になってしまうので

$$ps-qr\neq 0\qquad (2.3)$$

とします。

次に，これらの条件の下で，(2.1) を

a_n から a_{n+1} への変換

とみなしてその不動点を調べます。(2.1) で

$$a_n=a_{n+1}=t$$

とおくと

$$rt^2-(p-s)t-q=0\ (r\neq 0,\ ps-qr\neq 0)$$

この2次方程式が (2.1) の特性方程式であり，2個の解をもつときと1個の解（重解）をもつときがあります。

以下では，繁雑な一般論を避けるために，α を重解の特性根としてもつ場合（放物型）の一般例として

$$a_1=a,\ a_{n+1}=\frac{a_n-\alpha^2}{a_n-(2\alpha-1)}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(ただし　$a\neq\alpha,\ \alpha\neq 1$)　(2.4)

を採ります。

(参考までに，(1.1) は (2.4) で $a=1$，$\alpha=2$ とすれば得られる)。ただし書きについて説明します。

(2.4) は条件 (2.2) を満たしていますが，(2.3) を満たすために $\alpha \neq 1$ としてあります。また，(2.4) の特性根は α なので，もし

$a_1=a=\alpha$ とすると

すべての n について $a_n=\alpha$ ($\{a_n\}$ は定数列)

となるので，この場合を除くために $a \neq \alpha$ としてあります。

以上のようにしても§1で指摘した問題が残ります。

> **(問題1)** (2.4) によって数列 $\{a_n\}$ が確定するための初期値 a の条件を求めよ。

次に，2つの実数特性根 α，β をもつ場合 (双曲型) の一般例として

$$a_1=a,\ a_{n+1}=\frac{pa_n-\alpha\beta}{a_n-(\alpha+\beta-p)}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(ただし $\alpha \neq \beta$，$a \neq \alpha$，$a \neq \beta$，$p \neq \alpha$，$p \neq \beta$) (2.5)

を採ります。

(参考までに (1.3) は (2.5) で $a=1$，$p=1$，$\alpha=2$，$\beta=3$ とすれば得られる。) ただし書きは (2.4) と同じ理由から出てきます。

以上のようにしても§1で指摘した問題が残ります。

> **(問題2)** (2.5) によって数列 $\{a_n\}$ が確定するための初期値 a の条件を求めよ。

§3．逆漸化式

ここでは上記の問題の解決の糸口をつかむために§1で扱った具体例を検討します。

(1.1) では $\{a_n\}$ が確定し，(1.2) では確定しませんでした。その違いは初期値にあり，(1.1) ではすべての n について a_n が漸化式の分母を0にせず，(1.2) では $a_3=3$ となり漸化式の分母を0にしました。結局，初期値 a の条件は

「すべての n について数列の第 n 項 a_n が漸化式の分母を0にしないように初期値 a を定める」 (3.1)

ことです。(2.4)，(2.5) が数列の適切な定義 (well defined) になるための条件は (3.1) です。そこで，条件 (3.1) を検討します。

§1で扱った漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}$ について，$a_3=3$ となる a_2，a_1 を漸化式を逆にたどって求めると，

$$a_2=\frac{5}{2},\ a_1=\frac{7}{3}$$

となりこの初期値 $\dfrac{7}{3}$ が不適な初期値なわけです。

一般に，ある番号 m について

$a_m=3$

となる初期値 a を求めるためには

数列 $\{a_n\}$ を逆に遡る数列 $\{b_n\}$ の漸化式

が必要になります。これを，本稿では逆漸化式と名付けることにします。

> **〔定義〕** 与えられた隣接2項間漸化式
>
> $a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (3.2)
>
> に対して，関数
>
> $y=f(x)$
>
> が逆関数
>
> $y=f^{-1}(x)$
>
> をもつとき，隣接2項間漸化式
>
> $b_{n+1}=f^{-1}(b_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (3.3)
>
> を (3.2) の逆漸化式という。

周知のように，一般に

関数 $f(x)=\dfrac{px+q}{rx+s}\ (ps-qr \neq 0)$ (3.4)

の逆関数は存在して

$$f^{-1}(x)=\frac{-sx+q}{rx-p}\ (ps-qr \neq 0) \quad (3.5)$$

ですから，いま検討している (2.4)，(2.5) のそれぞれの漸化式の逆漸化式はそれぞれ存在します。

ただし，いずれの場合にも，分母 $\neq 0$ という条件が必要です。

§4．問題の解決

問題1を再掲します。

> **(問題1)** 初期値 $a_1=a$，
>
> 漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-\alpha^2}{a_n-(2\alpha-1)}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
>
> (ただし，$a \neq \alpha$，$\alpha \neq 1$)
>
> によって，数列 $\{a_n\}$ が確定するための初期値 a の条件を求めよ。

(解) 確定するための条件は，すべての n について $a_n \neq 2\alpha-1$ が成立することである。与えられた漸

化式の逆漸化式を (3.5) により求めると

$$b_{n+1}=\frac{(2\alpha-1)b_n-\alpha^2}{b_n-1}$$

となる。

ここで，初期値を

$b_1=2\alpha-1$ ($\{a_n\}$ の漸化式の分母を 0 にする値)

とおく。このとき，

すべての n について $b_n\neq 1$

が示せる。(後述　注①参照) したがって $\{b_n\}$ は確定する。$\left\{\frac{1}{b_n-\alpha}\right\}$ が等差数列であることに注意すれば

$$\{b_n\}: 2\alpha-1,\ \frac{3\alpha-1}{2},\ \frac{4\alpha-1}{3},\ \cdots,\ \frac{(n+1)\alpha-1}{n},\ \cdots$$

を得る。これらが，$\{a_n\}$ の初期値 a として不適な値のすべてなので，求める条件は

$$a\neq\frac{(n+1)\alpha-1}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad (4.1)$$

である。〔解終〕

参考までに，$\alpha=2$ とすると

$$\{b_n\}: 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{19}{4},\ \cdots$$

となり，$a_1=a=\frac{7}{3}$ とすると

$\{a_n\}$ は $\{b_n\}$ を逆に遡って

$$\{a_n\}: \frac{7}{3},\ \frac{5}{2},\ 3$$

となり a_4 が存在しない。これが (1.2) である。

> **(問題 2)**　初期値 $a_1=a$,
>
> 漸化式 $a_{n+1}=\frac{pa_n-\alpha\beta}{a_n-(\alpha+\beta-p)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
>
> (ただし $\alpha\neq\beta$, $a\neq\alpha$, $a\neq\beta$, $p\neq\alpha$, $p\neq\beta$)
>
> によって，数列 $\{a_n\}$ が確定するための初期値 a の条件を求めよ。

(解)　$\{a_n\}$ が確定するための条件は，すべての n について

$a_n\neq\alpha+\beta-p$

が成立することである。

(i)　$p=\frac{\alpha+\beta}{2}$ のとき (このときは逆漸化式を使わずに，直接不適な初期値 a を求める)

このとき与えられた漸化式は

$$a_{n+1}=\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}a_n-\alpha\beta}{a_n-\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

となる。このとき

$$a_{n+1}-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}{a_n-\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad (4.2)$$

が成立する。したがって，まず

$$a_1=a\neq\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (4.3)$$

が必要で，この条件の下で

ある n に対して $a_n\neq\frac{\alpha+\beta}{2}$

を仮定すれば (4.2) より

$a_{n+1}\neq\frac{\alpha+\beta}{2}$

がいえるから帰納的に

すべての n に対して $a_n\neq\frac{\alpha+\beta}{2}$

となる。よって，求める条件は (4.3) である。

(ii)　$p\neq\frac{\alpha+\beta}{2}$ のとき

(3.5) により $\{a_n\}$ の逆漸化式を求めると

$$b_{n+1}=\frac{(\alpha+\beta-p)b_n-\alpha\beta}{b_n-p}$$

ここで

$b_1=\alpha+\beta-p$

($\{a_n\}$ の漸化式の分母を 0 にする値)

とおく。このとき，

すべての n について $b_n\neq p$

が示せる。(後述　注②参照)　したがって $\{b_n\}$ は確定する。$\left\{\frac{b_n-\alpha}{b_n-\beta}\right\}$ が等比数列であることに注意すれば

$$b_n=\frac{\alpha(p-\alpha)^n-\beta(p-\beta)^n}{(p-\alpha)^n-(p-\beta)^n}$$

を得る。したがって，求める条件は

$$a\neq\frac{\alpha(p-\alpha)^n-\beta(p-\beta)^n}{(p-\alpha)^n-(p-\beta)^n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad (4.4)$$

である。

最後に，(4.4) で $p=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $n=1$ とすれば (4.3) が得られるから，(i), (ii)いずれの場合にも求める条件は (4.4) である。〔解終〕

参考までに，$p=1$，$\alpha=2$，$\beta=3$ とすると

$$\{b_n\}: 4,\ \frac{10}{3},\ \frac{22}{7},\ \frac{46}{15},\ \frac{94}{31},\ \cdots$$

となり，$a_1=a=\dfrac{46}{15}$ とすると

$$\{a_n\}: \frac{46}{15},\ \frac{22}{7},\ \frac{10}{3},\ 4$$

となり，a_5 が存在しない。これが (1.4) である。

〔注①〕

初期値が $b_1=2\alpha-1$ のとき，

漸化式 $b_{n+1}=\dfrac{(2\alpha-1)b_n-\alpha^2}{b_n-1}$

$(\alpha\neq1,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定まる b_n について，すべての n に対して

$b_n\neq1$ が成立する。

(証明) 次の等式を使う。

$$b_{n+1}-\alpha=(\alpha-1)\frac{b_n-\alpha}{b_n-1} \tag{4.5}$$

(i) $\alpha>1$ のとき

$b_1=2\alpha-1>\alpha>1$ から $b_1>\alpha$

ある n について $b_n>\alpha$

と仮定すれば (4.5) から $b_{n+1}>\alpha$

したがって，帰納的に

すべての n について $b_n>\alpha>1$

すなわち $b_n\neq1$

(ii) $\alpha<1$ のとき

$b_1=2\alpha-1<\alpha<1$ であるから

(i)と同様にして (4.5) を使って

すべての n について $b_n\neq1$ がいえる。(証明終)

〔注②〕

初期値が $b_1=\alpha+\beta-p$ のとき

漸化式 $b_{n+1}=\dfrac{(\alpha+\beta-p)b_n-\alpha\beta}{b_n-p}$

$\left(\alpha\neq\beta, p\neq\alpha, p\neq\beta, p\neq\dfrac{\alpha+\beta}{2}, n=1,2,3,\cdots\right)$

で定まる b_n について，すべての n に対して

$b_n\neq p$ が成立する。

(証明) $\alpha<\beta$ としても一般性を失わない。

次の 3 つの等式を使う。

$$b_{n+1}-\beta=(\alpha-p)\frac{b_n-\beta}{b_n-p} \tag{4.6}$$

$$b_{n+1}-\alpha=(\beta-p)\frac{b_n-\alpha}{b_n-p} \tag{4.7}$$

$$b_{n+1}-p=\frac{2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-p\right)(b_n-p)+(p-\alpha)(\beta-p)}{b_n-p} \tag{4.8}$$

(i) $p<\alpha$ のとき

$p<\alpha<\beta<\alpha+\beta-p=b_1$ が成立するから

$b_1>\beta>p$

ある n について $b_n>\beta$

と仮定すれば (4.6) により $b_{n+1}>\beta>p$ となるから

帰納的にすべての n について

$b_n>\beta>p$ すなわち $b_n\neq p$ が成立する。

(ii) $p>\beta$ のとき

$p>\beta>\alpha>\alpha+\beta-p=b_1$ が成立するから

(4.7) を使って(i)と同様にして

すべての n について $b_n\neq p$

が示せる。

(iii) $\alpha<p<\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のとき

$\alpha<p<\alpha+\beta-p<\beta$ が成立するから $b_1>p$

ある n について $b_n>p$

と仮定すれば (4.8) により $b_{n+1}>p$ となるから

帰納的にすべての n について

$b_n>p$ すなわち $b_n\neq p$ が成立する。

(iv) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}<p<\beta$ のとき

(iii)と同様である。(証明終)

§5．定理

以上の結果を 2 つの定理としてまとめておきます。

〔定理 1〕 初期値 $a_1=a$,

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-\alpha^2}{a_n-(2\alpha-1)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ただし $a\neq\alpha$，$\alpha\neq1$)

によって，数列 $\{a_n\}$ が確定するための条件は

$$a\neq\frac{(n+1)\alpha-1}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

〔定理 2〕 初期値 $a_1=a$,

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n-\alpha\beta}{a_n-(\alpha+\beta-p)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ただし $\alpha\neq\beta$，$a\neq\alpha$，$a\neq\beta$，$p\neq\alpha$，$p\neq\beta$)

によって，数列 $\{a_n\}$ が確定するための条件は

$$a\neq\frac{\alpha(p-\alpha)^n-\beta(p-\beta)^n}{(p-\alpha)^n-(p-\beta)^n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

§6．漸化式の概念の拡張

§1で扱った(1.2)を再び取り上げます。

$$a_1=\frac{7}{3},\quad a_{n+1}=\frac{a_n-4}{a_n-3}\ (n=1,\ 2) \qquad (6.1)$$

ただし，nの変域を換えてあります。

$$\{a_n\}:\frac{7}{3},\ \frac{5}{2},\ 3$$

で，a_4は存在しません。なお，ここまでの範囲で

$$a_n=2-\frac{1}{n-4}\ (n=1,\ 2,\ 3) \qquad (6.2)$$

です。隣接2項間漸化式とはある項から次の項を求める手続き

$$a_n \to a_{n+1}$$

のことですから，あるa_nが漸化式の分母を0にすれば，次の項a_{n+1}は存在しません。ここで，極限の考えを用いて漸化式の拡大解釈をします。

漸化式 $a_4=\dfrac{a_3-4}{a_3-3}$ において，

$$a_3 \to 3-0 \text{ のとき } a_4 \to \infty$$

(漸化式の性質上，nは $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$とするので左方極限を考える)と解釈すれば

$$a_5=\lim_{a_4\to\infty}\frac{a_4-4}{a_4-3}=1$$

を得，a_6以降は漸化式から順に

$$a_6=\frac{3}{2},\quad a_7=\frac{5}{3},\ \cdots$$

と定まります。結局，この解釈によれば

$$\{a_n\}:\frac{7}{3},\ \frac{5}{2},\ 3,\ \square,\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \cdots \qquad (6.3)$$

となります。(□は第4項で存在しない)

(6.3)は漸化式を拡大解釈して得られた$\{a_n\}$です。次に，別の方向から$\{a_n\}$を考えてみます。それは $n=1,\ 2,\ 3$ の範囲内で求めた(6.2)$\left(\text{前述した通り}\left\{\dfrac{1}{a_n-2}\right\}\text{が等差数列をなすことを利用して得た}\right)$を使うことです。いま，(6.2)を単独に自然数$n$の関数と考え，定義域を $n\neq 4$ を満たすすべての自然数としてみます。すると

$$\{a_n\}:\frac{7}{3},\ \frac{5}{2},\ 3,\ \square,\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \cdots$$

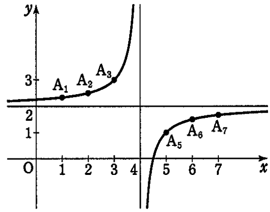
となります。(□は第4項で存在しない)

すなわち，(6.3)と一致しています。このことは上記の解釈が合理的であることを示唆していますが，さらに，グラフを利用して考察します。

いま，(6.2)から引き起こされる関数

$$y=2-\frac{1}{x-4}\ (x\text{は実数})$$

を考え，そのグラフを描きます。



2直線 $x=4$，$y=2$ を漸近線とする直角双曲線です。ここで，横軸をn軸に，縦軸をa_n軸に読み換えると，(6.2)のグラフになり，それは $n=1,\ 2,\ 3$ および $n=5,\ 6,\ 7,\ \cdots$を定義域とする点のグラフ

$$\{A_n(n,\ a_n)\,|\,n\neq 4\}$$

になります。

いいかえると，(6.1)ではa_4が難所なのですが，$a_5=1$ とすればa_6以降も漸化式から定まる。そして $a_5=1$ の根拠を $a_4\to\infty$ に求め，それは上記のように妥当であると考えられるということです。

このようにすれば，(6.1)も数列$\{a_n\}$を定めると(拡大)解釈することができ，それは(6.2)(ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ \cdots$)で定まる数列と同一とみなすことができます。

このことは，漸化式の概念を拡張したとも考えられます。

なお，双曲型についても同様の考察ができます。

(神奈川県立湘南高等学校)