三角形のすべての線分の比を3つの数で表す

菅谷　円博

§0．はじめに

以前，ベクトルの1次結合の問題のプログラムを作成したことがある。与えられた線分比から解を求めるときに，なるべく簡単に残りの線分比を求められないかを考えてみた。試行錯誤の末，3つの数ですべての線分の比を表せることに気がついた。

また，この3つの数が1次結合のいろいろな問題に深くかかわっていること，速く正確に求められることを知り，授業等で生徒に伝えてみたところ，好評だったので，その方法について述べてみたい。

§1．三角形の辺の比について

図1の三角形ABCにおいて，チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad \text{である。ここで，}$$

BD：DC$=p$：q，CE：EA$=r$：s，AF：FB$=t$：u とおくと

$$\frac{t}{u}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=1 \text{ より } \frac{t}{u}=\frac{qs}{pr} \quad \text{がいえる。}$$

さらに　BD：DC$=p$：$q=ps$：qs，

CE：EA$=r$：$s=pr$：ps

とすると，三角形の3辺の比は図2のようになる。ここで，あらためて $a=pr$，$b=qs$，$c=ps$ とおくと図3のように，a，b，c だけで表すことができる。

また，図4において，メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}}=1$$

$$\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PA}}=\frac{\mathrm{FB}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{ab}{b(b+c)}=\frac{a}{b+c}$$

となり，同様に

$$\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PB}}=\frac{b}{c+a},\ \frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PC}}=\frac{c}{a+b} \quad \text{となる。}$$

このように，三角形の6本のすべての線分比が a，b，c の3つの数で表すことができる。この比を便宜上「スガヤの比」と呼ぶことにする。（図5）

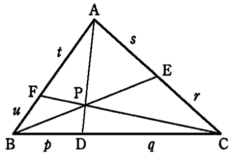


図1

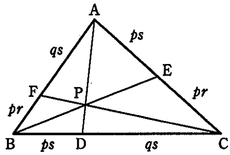


図2

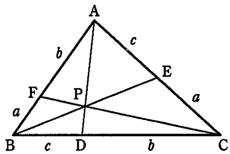


図3

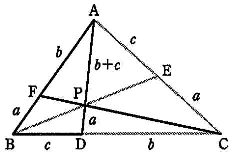


図4

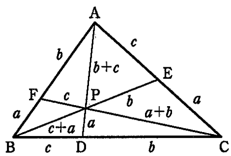


図5

§2．「スガヤの比」の特徴

(1) 各頂点を端点とする3本の線分のスガヤの比のうち，その頂点を端点としない線分（外線分と名づける）のスガヤの比は同じ値である。

例えば，頂点Aに対して，PD, FB, ECのスガヤの比はすべて a となる。（図6）

(2) 各頂点から内部の点Pを結んだ線分（中線分）のスガヤの比は，その頂点を端点とする2本の隣り合った線分（内線分）のスガヤの比の和になる。例えば，頂点Aに対して，APのスガヤの比は，AFとAEのスガヤの比を加えた $b+c$ となる。（図7）（PFとPEを加えてもよい）

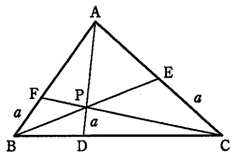


図6

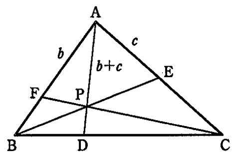


図7

§3．「スガヤの比」に直す例

与えられた線分比がそのままスガヤの比にならない場合は，スガヤの比の特徴に従って，与えられた線分の比を適当に何倍かすることにより，6本の線分のスガヤの比をすべて求めることが可能となる。

つまり，各頂点の

① **外線分のスガヤの比をそろえる**

② **中線分のスガヤの比を内線分のスガヤの比の合計にあわせる。**

図8の例では，FBのスガヤの比をPDと同じ2にするために，AF：FB＝4：2にする。AFとAEのスガヤの比を加えるとAPの5となるので，AEのスガヤの比は1となる。（以下，PF，BDは1，PE，DCは4，BPは2+1=3，CPは4+2=6）

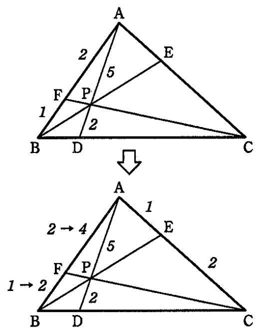


図8

§4．「スガヤの比」の応用

三角形ABCと点Pについて，スガヤの比が図9のようになっているとすると次の等式が成立する。

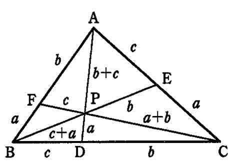


図9

---

〔1〕 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$ … ①

（証明） $\overrightarrow{AP}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD}$

$$=\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$$

$$=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$$ 証明終

つまり，分母はAPとPDのスガヤの比の和，分子は $\overrightarrow{AD}$ と同じ $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$ となっている。

①より $\overrightarrow{OP}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$ も成立する。

〔2〕 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ … ②

(証明) ①より

$$(a+b+c)\overrightarrow{AP}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}-(a+b+c)\overrightarrow{PA}$$
$$=b(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+c(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$$
$$-(a+b+c)\overrightarrow{PA}-b(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})$$
$$-c(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})=\vec{0}$$

よって $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成立する。

証明終

逆に，②の形をしていれば，スガヤの比は図9のようになっている。

つまり，$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ の係数がそれぞれ，PD，PE，PF のスガヤの比になっており，その値から簡単にスガヤの比をすべて書き入れることができる。

〔3〕 △PBC：△PCA：△PAB$=a:b:c$ … ③

(証明) △ABC：△PBC＝AD：PD

$=(a+b+c):a$

同様に　△ABC：△PCA$=(a+b+c):b$

△ABC：△PAB$=(a+b+c):c$

より③が成立する。

証明終

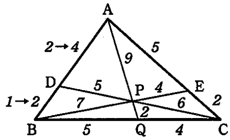
このように②，③は①から導くことができるわけだが，スガヤの比の PD，PE，PF の値がそのまま②のベクトルの係数となり，面積比を表すというおもしろい事実がでてくる。

§5．「スガヤの比」の応用例

〔例1〕 △ABC において，辺 AB を 2：1 の比に内分する点をD，辺 AC を 5：2 の比に内分する点をEとし，BE と CD の交点をP，AP と BC との交点をQとする。

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2) BQ：QC，AP：PQ をそれぞれ求めよ。



AD：DB＝4：2 に直してスガヤの比を書き入れる。

(1) 応用〔1〕より

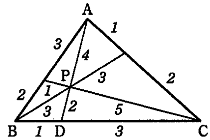
$$\overrightarrow{AP}=\frac{4\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}}{2+4+5}$$
$$=\frac{4}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{11}\overrightarrow{AC}$$

(2) BQ：QC＝5：4，AP：PQ＝9：2

〔例2〕 △ABC と点Pに対して $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。AP と BC の交点をDとする。

(1) BD：DC，AP：PD を求めよ。

(2) △PBC：△PCA：△PAB を求めよ。



応用〔2〕よりスガヤの比を書き入れる。

(1) BD：DC＝1：3

AP：PD＝4：2＝2：1

(2) 応用〔3〕より

△PBC：△PCA：△PAB＝2：3：1

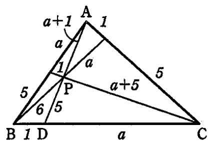
〔例3〕 a を正の定数とする。△ABC の内部の点Pが $5\overrightarrow{PA}+a\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき

$$\overrightarrow{AP}=\frac{〔ア〕}{a+〔イ〕}\overrightarrow{AB}+\frac{〔ウ〕}{a+〔エ〕}\overrightarrow{AC}$$ が成り立つ。

直線 AP と辺 BC との交点Dが辺 BC を 1：8 に内分するならば，a=〔オ〕となり，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{〔カ〕}{〔キク〕}\overrightarrow{AD}$$ となる。

(平成11年センター試験　数学Bより)



応用〔2〕よりスガヤの比を書き入れる。応用〔1〕より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{a\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{a+1+5}$$
$$=\frac{a}{a+6}\overrightarrow{AB}$$
$$+\frac{1}{a+6}\overrightarrow{AC}$$

BD：DC$=1:a=1:8$

より，$a=8$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{a+1}{a+1+5}\overrightarrow{AD}=\frac{9}{14}\overrightarrow{AD}$$

§6．おわりに

一般に異なる直線上にある線分比は関連がないが，スガヤの比に関しては，異なる直線上の線分比でも，加えたり面積比を表したりと関連しており興味深かった。短時間で比を求められるので，マークシートでの解答や，筆記試験においての解答の確認等で有効に利用できると思う。

(山梨県立吉田高等学校)