${}_{n}C_{r}$ についての１つの考察

渡辺（わたなべ）　了悟（りょうご）

§1．はじめに

以下の命題につきあたったのは，

$${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}$$

の証明をながめていたときに，n の中のある数１個を r に含めて $r-1$ 個選ぶ場合と，それを含まないで r 個選ぶ場合の説明がありました。それを読んでいたとき，ある数が２個，３個，４個と話を押し進めて見れば，上の公式はどのように変化するのだろうかとふと思い，調べてみることにしました。そして下記の命題につきあたりました。

〔命題〕

${}_{n}C_{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ のとき

$${}_{n}C_{r}={}_{n-m}C_{r}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}{}_{m}C_{k}\cdot{}_{n-k}C_{r-k}$$

（ただし，$n-m\geqq r\geqq 1$，$r\geqq m$）

§2．一般の証明

一般の証明はC. L. リウ著の組合せ数学入門Ⅰ・Ⅱ(共立出版)の中の命題，ふるいわけ公式，あるいは，包除原理から

$$N(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})$$

ここで和 $\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}$ は $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq n$ を満たす組 $(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 全体にわたってとるものとする。

を用いると証明できると考えました。

以下は恩師のあたたかい指導のもとで一般的に証明を完了させることができました。以下にそれをここに記させて頂きます。

〔証明〕

有限集合 Z に対し Z の元の個数を $N(Z)$ で表す。また自然数 n，r に対し

$U\subset\{1,2,\cdots,n\}$ かつ $N(U)=r$ を満たす U 全体からなる集合を $S(n,r)$ で表す。

このとき $N(S(n,r))={}_{n}C_{r}$ が成り立つ。さらに $1\leqq k\leqq m$ なる k に対し k を含む $S(n,r)$ の元全体からなる集合を A_k とおく。

$$N(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})$$

（C. L. リウ著の命題から）

ここで各 k に対し

$\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})$ について，いま

$k\leqq m$，$1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq m$ とすると

$A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}$ は i_1，i_2，$\cdots$，i_k を含む

$S(n,r)$ の全体からなる集合である。

したがって $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}$ の元は

i_1，i_2，$\cdots$，i_k に $\{1,2,\cdots,n\}$ から

i_1，i_2，$\cdots$，i_k を除いた $n-k$ 個から $r-k$ 個を選んで付け加えたものである。

よって $N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})={}_{n-k}C_{r-k}$

さらに $k\leqq m$，$1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq m$ なる

i_1，i_2，$\cdots$，i_k の組は全部で ${}_{m}C_{k}$ 個あるから

$$\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})={}_{m}C_{k}\cdot{}_{n-k}C_{r-k}$$

よって

$${}_{n}C_{r}={}_{n-m}C_{r}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}{}_{m}C_{k}\cdot{}_{n-k}C_{r-k}$$

が得られる。これをもっとかみくだいた証明が下記のものです。

§3．わかりやすい証明

〔証明〕 n 個の中から r 個選んでくるとき，あるaが選ばれているときは○，選ばれていないときは×と表すことにする。

(i)　{a}　まず１個が選ばれているときと，選ばれていないときとを考える。

a

○ … ${}_{n-1}C_{r-1}$

× … ${}_{n-1}C_{r}$

したがって，

$${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}$$

(ii) {a, b} 次にa，b 2個が選ばれているとき(a，bが選ばれていないの否定命題は「aが選ばれているまたはbが選ばれている」である)を考える。

「aが選ばれている」とは次の2通りである。

a	b	
○	○	… ${}_{n-2}C_{r-2}$
○	×	… ${}_{n-1}C_{r-1}$

「bが選ばれている」も上と同様である。

a	b	
○	○	… ${}_{n-2}C_{r-2}$
×	○	… ${}_{n-1}C_{r-1}$

「a，bが選ばれていない」ときは

a	b	
×	×	… ${}_{n-2}C_{r}$

ここで「aが選ばれている」または「bが選ばれている」の中に「a，b両方とも選ばれている」が2度，すなわち ${}_{2}C_{1}$ 回現れてくるから1つ削除しなければならないことと，a，bの片方ずつ選ばれるのは ${}_{2}C_{1}$ であるから ${}_{n}C_{r}$ は次のように表現される。

$${}_{n}C_{r}={}_{n-2}C_{r}+{}_{2}C_{1}\cdot{}_{n-1}C_{r-1}-{}_{n-2}C_{r-2}$$

(iii) {a, b, c} 3個が選ばれているときを考える。2個のときと同じように{a, b, c} 3個が選ばれていないの否定命題は「aまたはbまたはcが選ばれている」であるから，

「aが選ばれている」とは次の4通りである。

a	b	c	
○	○	○	… ${}_{n-3}C_{r-3}$
○	○	×	… ${}_{n-2}C_{r-2}$
○	×	○	… ${}_{n-2}C_{r-2}$
○	×	×	… ${}_{n-1}C_{r-1}$

「bが選ばれている」(上と同様)

a	b	c	
○	○	○	… ${}_{n-3}C_{r-3}$
○	○	×	… ${}_{n-2}C_{r-2}$
×	○	○	… ${}_{n-2}C_{r-2}$
×	○	×	… ${}_{n-1}C_{r-1}$

「cが選ばれている」(上と同様)

a	b	c	
○	○	○	… ${}_{n-3}C_{r-3}$
○	×	○	… ${}_{n-2}C_{r-2}$
×	○	○	… ${}_{n-2}C_{r-2}$
×	×	○	… ${}_{n-1}C_{r-1}$

「a，bが選ばれている」とは次の2通りである。

a	b	c	
○	○	○	… ${}_{n-3}C_{r-3}$
○	○	×	… ${}_{n-2}C_{r-2}$

「b，cが選ばれている」(上と同様)

a	b	c	
○	○	○	… ${}_{n-3}C_{r-3}$
×	○	○	… ${}_{n-2}C_{r-2}$

「c，aが選ばれている」(上と同様)

a	b	c	
○	○	○	… ${}_{n-3}C_{r-3}$
○	×	○	… ${}_{n-2}C_{r-2}$

「{a, b}または{b, c}または{c, a}が選ばれている」はすでに「aまたはbまたはcが選ばれる」の中に含まれている。したがって，これを差し引かなければならない。

ただし，この中には「{a, b, c}が選ばれている」が差し引かれてしまうから，逆に付け加えなければならない。ところで，

a，b，cの中から1個選ぶ個数は ${}_{3}C_{1}$，また2個選ぶ個数は ${}_{3}C_{2}$ であり，最後に「{a, b, c} 3個が選ばれない」は1回あるのでそれを加え，以上の事をすべて考慮すれば ${}_{n}C_{r}$ は次のように表現される。

$${}_{n}C_{r}={}_{n-3}C_{r}+{}_{3}C_{1}\cdot{}_{n-1}C_{r-1}-{}_{3}C_{2}\cdot{}_{n-2}C_{r-2}+{}_{n-3}C_{r-3}$$

この考え方は一般に言えるから

$${}_{n}C_{r}={}_{n-m}C_{r}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}{}_{m}C_{k}\cdot{}_{n-k}C_{r-k}$$

(ただし，$n-m\geqq r\geqq 1$，$r\geqq m$)

さて，この公式の係数だけを取り出してみると次の様になる。

1　1	$m=1$ 個
1　2　−1	$m=2$ 個
1　3　−3　1	$m=3$ 個
1　4　−6　4　−1	$m=4$ 個
1　5　−10　10　−5　1	$m=5$ 個
1　6　−15　20　−15　6　−1	$m=6$ 個

以下同様にパスカルの三角形に似ている。

これを擬似パスカルの三角形と名づけてみたい。

この擬似パスカルの三角形の各段の横計は条件を満たす任意のmのすべてで2となっている。簡単に示すことができますので，読者の皆さんへの練習問題にしておきます。

例として上の命題を用いると，100万人の中から1000人を調査して，ある特定の人10人が含まれる確率などが簡単に計算できます。これを統計的な予測などに利用できないかなどと考えています。

§4．更にわかること

$${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-m}\mathrm{C}_r+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}{}_m\mathrm{C}_k\cdot{}_{n-k}\mathrm{C}_{r-k}$$

（ただし，$n-m\geqq r\geqq 1,\ r\geqq m$）

として，両辺を${}_n\mathrm{C}_r$で割りnに関する極限値を取りますと，左辺は当然1となります。

ところが，右辺の第一式ですが

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{n-m}\mathrm{C}_r}{{}_n\mathrm{C}_r}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n-m)!}{r!(n-m-r)!}}{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-m)!\,r!\,(n-r)!}{r!\,(n-m-r)!\,n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\cdots(n-m-r+1)(n-m-r)!(n-r)!}{(n-m-r)!\,n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\cdots(n-m-r+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\left(1-\frac{m+2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m+r-1}{n}\right)}{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}$$

$=1$ となります。

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}{}_m\mathrm{C}_k\cdot{}_{n-k}\mathrm{C}_{r-k}}{{}_n\mathrm{C}_r}=0$$

すなわち，nを大きくしてやるとn個からr個取ってきたとき，ある特定の要素をもったm個の物が取られる確率が0に収束していくことを示している。

これから先は私のかってな推測ですが，学習はすればするほど，試験の成績は伸び受験のとき特に体調不良で悪いものとか，まぐれで意外に良いものなどが少なくなり，常に成績は勉強時間によって向上するとすれば，成績の点数は満点に近づく。上の結論はそのことを示しているような気がします。

もしそのように考えることができるとすれば，これを学習の理屈として生徒の学習に意欲を持たせてみたいと考えています。

《参考文献》

〔1〕 組合せ数学入門Ｉ・II　C.L.リウ著
共立出版

（青森県立八戸中央高等学校）