’04年大学入試の背景を探る

宮川(みやがわ)　幸隆(ゆきたか)

§1．東京医科歯科大(前期)の1番

本節では標題の問題の背景を探ります。その問題とは次のようなものです：

> 次の条件(A)，(B)を満たす関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を考える。
>
> (A)　$f_n(x)$ は x の n 次式で表される。
>
> (B)　任意の実数 θ に対して次式が成立する。
>
> $$f_n(2\cos\theta)\sin\theta=\sin(n+1)\theta$$
>
> このとき以下の各問いに答えよ。
>
> (1)　省略　　(2)　省略　　(3)　省略
>
> (4)　整式 $f_n(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りが $ax-25$ のとき，次式 n および定数 a を求めよ。

参考文献〔1〕の解答によれば，(4)の答は，$n=22$，$a=24$ です。そこで本稿では，実際に $f_{22}(x)$ を求めてみましょう。条件(B)の式を

$$g_{n+1}(\cos\theta)\sin\theta=\sin(n+1)\theta$$

に変えれば，$g_{n+1}(x)=f_n(2x)$ はやはり x の n 次式で，**これは第2種チェビシェフ多項式**と呼ばれます。

sinの加法定理から，多項式列 $\{g_n\}$ は，漸化式

$$\boldsymbol{g_{k+1}(x)=2xg_k(x)-g_{k-1}(x)\quad (k\geqq 2)}$$

を満たします。また，$g_1(x)=1$ は明らかであり，sinの2倍角公式から，$g_2(x)=2x$ ですから，これらの初期条件と上の漸化式から，$g_m(x)$ をパソコンで次々と求めると

$$\begin{aligned}g_{23}(x)=&4194304x^{22}-22020096x^{20}\\&+49807360x^{18}-63504384x^{16}+50135040x^{14}\\&-25346048x^{12}+8200192x^{10}-1647360x^{8}\\&+192192x^{6}-11440x^{4}+264x^{2}-1\end{aligned}$$

となります。これが $f_{22}(2x)$ に等しいのだから，

$$\begin{aligned}f_{22}(x)=&x^{22}-21x^{20}+190x^{18}-969x^{16}+3060x^{14}\\&-6188x^{12}+8008x^{10}-6435x^{8}+3003x^{6}\\&-715x^{4}+66x^{2}-1\end{aligned}$$

となります。

さて，$f_{22}(x)$ を $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りが $24x-25$ となることを確かめましょう：

そのために，$f_{22}(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$$f_{22}(x)=(x-2)Q(x)+R \quad\cdots\cdots ①$$

なので，$Q(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $Q_1(x)$，余りを R_1 とすると

$$Q(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1$$

を①へ代入して

$$f_{22}(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+R_1(x-2)+R$$

となるので，$f_{22}(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りは

$$R_1(x-2)+R \quad\cdots\cdots ②$$

です。そこで $f_{22}(x)$ をまず組立除法を用いて $x-2$ で割ることにします。

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}1 & 0 & -21 & 0 & 190 & 0 & -969 & 0 & \underline{2}\\ & 2 & 4 & -34 & -68 & 244 & 488 & -962 & \\ \hline 1 & 2 & -17 & -34 & 122 & 244 & -481 & -962 &\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr}3060 & 0 & -6188 & 0 & 8008 & 0\\ -1924 & 2272 & 4544 & -3288 & -6576 & 2864\\ \hline 1136 & 2272 & -1644 & -3288 & 1432 & 2864\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr}-6435 & 0 & 3003 & 0 & -715 & 0\\ 5728 & -1414 & -2828 & 350 & 700 & -30\\ \hline -707 & -1414 & 175 & 350 & -15 & -30\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}66 & 0 & -1\\ -60 & 12 & 24\\ \hline 6 & 12 & 23\end{array}$$

から，$R=23$ です。

一方，剰余の定理から

$$\begin{aligned}R_1=Q(1)=&1+2-17-34+122+244-481-962\\&+1136+2272-1644-3288+1432+2864\\&-707-1414+175+350-15-30+6+12\\=&24\end{aligned}$$

です。これらを②へ代入すると，確かに

$R_1(x-2)+R=24(x-2)+23=24x-25$
となっています。

§2．チェビシェフ多項式

§1で，せっかく第2種チェビシェフ多項式が登場したので，(第1種!?) チェビシェフ多項式，本来の**チェビシェフ多項式**にも登場してもらいましょう。

任意の実数 θ に対して

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす n 次式 $T_n(x)$ が存在しますが，この $T_n(x)$ が**チェビシェフ多項式**です。試みに

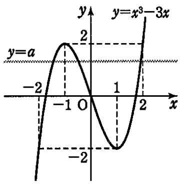
$$T_1(x)=x$$
$$T_2(x)=2x^2-1$$
$$T_3(x)=4x^3-3x$$
$$\cdots\cdots$$

です。

'04 年大学入試に，$T_3(x)$ と関連する問題が現れました。その問題とは次のようなものです：

> 関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように定める。
>
> $f_1(x)=x^3-3x \quad f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x)$
>
> $f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$
>
> 以下同様に，$n\geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば，関数 $f_{n+1}(x)$ を
> $f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-f_n(x)$ で定める。このとき，以下の問いに答えよ。
>
> (1)　省略　　(2)　省略
>
> (3)　n を3以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。
>
> 〔東京大 (前期) 理科の4番〕

$y=f_1(x)$ のグラフは，右の図のようになりますから



$$|x|>2 \Longrightarrow |f_1(x)|>2$$
$$\Longrightarrow |f_2(x)|=|f_1(f_1(x))|>2$$
$$\Longrightarrow |f_3(x)|=|f_1(f_2(x))|>2$$
$$\Longrightarrow \cdots$$
$$\Longrightarrow |f_{n+1}(x)|$$
$$=|f_1(f_n(x))|>2$$

となって，$f_n(x)=0$ を満たす実数 x は

$$|x|\leqq 2$$

の範囲にしか存在しません。そこで

$$x=2\cos\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

とおくことができるのです。すると

$$f_1(x)=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=2T_3(\cos\theta)=2\cos 3\theta$$
$$f_2(x)=f_1(f_1(x))=f_1(2\cos 3\theta)=2(4\cos^3 3\theta-3\cos 3\theta)$$
$$=2T_3(\cos 3\theta)=2\cos 3^2\theta$$

一般に

$$f_n(x)=2\cos 3^n\theta$$

です。$0\leqq\theta\leqq\pi$ から

$$0\leqq 3^n\theta\leqq 3^n\pi$$

ですから，$f_n(x)=0$ から

$$3^n\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{2+1}{2}\pi,\ \frac{2\times 2+1}{2}\pi,\ \cdots,\ \frac{2\times(3^n-1)+1}{2}\pi,$$

$$\therefore\ x=2\cos\frac{2\times 0+1}{2\cdot 3^n}\pi,\ \cdots,\ 2\cos\frac{2\times(3^n-1)+1}{2\cdot 3^n}\pi \quad\cdots\cdots ③$$

となって，$f_n(x)=0$ を満たす実数 x は③の 3^n 個となるのです。

さて，cos の加法定理から，チェビシェフ多項式列 $\{T_n(x)\}$ も，第2種チェビシェフ多項式列 $\{g_n(x)\}$ が満たす漸化式と全く同一の漸化式

$$\boldsymbol{T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x)} \quad (\boldsymbol{k\geqq 2}) \quad\cdots\cdots ④$$

を満たします。

やはり '04 年大学入試に，この④と関連する問題が現れました。それは次のようなものです：

> 多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$が，
>
> $f_0(x)=2,\ f_1(x)=x,$
>
> $f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
>
> を満たすとする。
>
> (1)　$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$であることを示せ。
>
> (2)　省略　　(3)　省略
>
> 〔名古屋大 (前期) 理系の3番〕

問題文の(1)の形から

$$\frac{f_n(2\cos\theta)}{2}=T_n(\cos\theta),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

ただし，$T_0(x)=1$ であるはずです。そこで，列

$$T_n(x)=\frac{f_n(2x)}{2},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \quad\cdots\cdots ⑤$$

が漸化式④を満たすことを示せばよい訳ですが，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

から，

$$\frac{f_n(2x)}{2}=\frac{2xf_{n-1}(2x)-f_{n-2}(2x)}{2}$$
$$=2x\cdot\frac{f_{n-1}(2x)}{2}-\frac{f_{n-2}(2x)}{2},\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$
ですから，
$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$
となって，⑤ は ④ を満たします。よって，
$$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \quad\cdots\cdots ⑥$$
が成り立ちます。$f_0(x)=2$ から ⑥ は $n=0$ のときも成り立ちます。$T_0(x)=1$ と定義しておけば，確かに，
$$T_2(x)=2x^2-1=2xT_1(x)-T_0(x)$$
であり，④ は
$$\boldsymbol{T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x)\quad (k\geqq 1)}$$
に拡張されます。

§3．チェビシェフ，第２種チェビシェフ多項式列の諸性質

因数分解　$T_n(x)$，$g_n(x)$ は次のように因数分解される。
$$T_n(x)=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\quad (n\geqq 1)$$
$$g_n(x)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\cos\frac{k}{n}\pi\right)\quad (n\geqq 2)$$
特に，n が３以上の奇数のときは
$$g_n(x)=2^{n-1}\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x+\cos\frac{j}{n}\pi\right)\left(x-\cos\frac{j}{n}\pi\right)$$
と因数分解され，この事実は初等整数論における平方剰余の相互法則の証明に応用される。

係数の整数論的性質　p を奇素数とするとき，$T_p(x)$ の $p-1$ 以下の項の係数はすべて p の倍数である。このことと cos の二倍角の公式から，$T_{2p}(x)$ の定数項と最高次の項以外の項の係数は $2p$ の倍数である。また，やはり cos の二倍角公式と m に関する帰納法から，$T_{2^m}(x)$ の定数項以外の項の係数は 2^m の倍数である。ただし，ここに m は自然数である。

sin の２倍角公式と m に関する帰納法から，$g_{2^m}(x)$ のすべての項の係数は 2^m の倍数である。更に，sin の２倍角公式と m，l に関する二重帰納法から，$g_{2^m l}(x)$ のすべての項の係数は 2^m の倍数である。ただし，ここに l は奇数の自然数である。

漸化式を解く　列 $\{T_n(x)\}$ の漸化式を解くと，$\mu_+=x+\sqrt{x^2-1}$，$\mu_-=x-\sqrt{x^2-1}$ を用いて
$$T_n(x)=\frac{\mu_+{}^{n+1}-\mu_+{}^n\mu_--\mu_-{}^{n+1}+\mu_+\mu_-{}^n}{4\sqrt{x^2-1}}$$

直交多項式系を成すこと　列 $\{T_n(x)\}$ は開区間 $(-1,\ 1)$ で定義された重み $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ に関する直交多項式系を成す。列 $\{g_n(x)\}$ は開区間 $(-1,\ 1)$ で定義された重み $\sqrt{1-x^2}$ に関する直交多項式系を成す。

母関数　$T_n(x)$ は次の母関数の関係を満たす：
$$T_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n=\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2},\quad -1<x<1,\quad |t|<1;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)\frac{t^n}{n}=-\frac{1}{2}\log(1-2xt+t^2),\quad -1<x<1,\quad |t|<1$$
$g_n(x)$ は次の母関数の関係を満たす：
$$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)t^{n-1}=\frac{1}{1-2xt+t^2},\quad -1<x<1,\ |t|<1$$

二階線形同次微分方程式　$y=T_n(x)$ は二階線形同次微分方程式
$$-n^2y+xy'-(1-x^2)y''=0$$
の特殊解である。

包絡線　曲線群 $\{y=T_n(x)\}$ の包絡線は $y=\pm 1$ であり，曲線群 $\{y=g_n(x)\}$ の包絡線は $y\sqrt{1-x^2}=1$ である。

超幾何級数との関連　$T_n(x)$ は超幾何級数を用いて
$$T_n(x)=F\left(-n,\ n,\ \frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right)$$
の形に表される。

代数的可解性　$T_n(x)=0$ も $g_n(x)=0$ も代数的に可解である。

《参考文献》

〔1〕 雑誌「大学への数学」2004 年 4，6 月号；特集 2004 年大学入試問題，東京出版
〔2〕 柳田五夫，チェビシェフの多項式について，数研通信　数学　No.17，数研出版