漸化式の変形と「特性方程式」について

もりしま　みつる
森島　充

§0．はじめに

$a_{n+1}=pa_n+q$ あるいは $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ といった漸化式の変形に特性方程式というものが出てくる。自分が高校生の時に学んで以来ずっと釈然としないものを感じていたが，自分なりに整理しなおすことを試みた。

§1．$a_{n+1}=pa_n+q$ 型

$q\fallingdotseq 0$ として，

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad \cdots ①$$

とする。①は a_n の値によって a_{n+1} の値が定まるが，これは関数

$$y=px+q \quad \cdots ②$$

における x と y の関係に等しい。①よりも②の方が計算上も視覚的にも慣れており，あつかいやすい。②でできる変形は①でもできるので，②を用いた説明が効果的と思われる。

②は直線の式なので②上の点$(x_1,\ y_1)$を用いて，

$$y-y_1=p(x-x_1)$$

と変形でき，$\underline{p\fallingdotseq 1 \text{ の時}}$は②上の点$(c,\ c)$を用いて

$$y-c=p(x-c)$$

と変形できる。$(c,\ c)$は②と直線 $y=x$ との交点なので，連立方程式

$$\begin{cases} y=px+q & \cdots ② \\ y=x & \cdots ③ \end{cases}$$

すなわち，方程式

$$x=px+q \quad \cdots ④$$

を解くことで求まる。したがって①は結局

$$a_{n+1}-c=p(a_n-c) \quad \cdots ⑤$$

と変形できる。普通②と③は数列$\{a_n\}$の極限を考えるときに利用されるが，ここでは単に①を⑤に変形するために用いただけであり，$\{a_n\}$の収束・発散には無関係である。しかし，求めた y を再び x に代入して，くり返し②を用いることで，$\{a_n\}$の動きを視覚化することは極限をあつかわない段階においても重要であると思われる。

§2．$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n+r$ 型

$r\fallingdotseq 0$ として

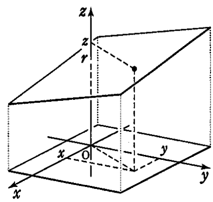
$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_r+r \quad \cdots ⑥$$

とする。そして§1と同様に

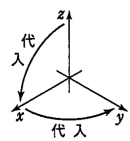
$$z=px+qy+r \quad \cdots ⑦$$

という関数を考えてみよう。

これは図のような xyz 空間内の平面であるが，⑥の使い方をこの⑦にあてはめるならば，まず x と y の値から z の値を求める。次に，求めた z の値を x に代入し，既にわかっている x の値を y に代入する。そしてこれをくり返す，という使い方になる。



$$\begin{array}{l} z=px+qy+r \\ \quad 代入\searrow \quad \searrow 代入 \\ z=px+qy+r \end{array}$$



すなわち

$$x \xleftarrow{代入} z=px+qy+r$$

$$y \xleftarrow{代入} x$$

ということだが，これは変数 w を1つ加えることで次のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xleftarrow{代入} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} px+qy+r \\ x \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

さらに省略して

$$\vec{x} \xleftarrow{代入} \vec{y}=A\vec{x}+\vec{b} \quad \cdots ⑧$$

と書ける。⑧は§1の②にあたる。§1と同様にして $\underline{|A-E|\fallingdotseq 0}$ のとき

$$\vec{x}=A\vec{x}+\vec{b} \quad \cdots⑨$$

を解くことによって⑧は

$$\vec{y}-\vec{c}=A(\vec{x}-\vec{c}) \quad \cdots⑩$$

と変形できる。⑨は§1の④に相当しており，⑤と⑩はこの作業によって，いずれも等比数列の形に変形された式，ということになる。そして，⑥の変形は次の⑪の変形に帰着する。

§3．$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ 型

普通は $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ と書かれるが，§2との関係で次のように書くことにする。

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \quad \cdots⑪$$

このとき，§2と同様に

$$z=px+qy \quad \cdots⑫$$

という関数を⑪と同じ使い方をすることによって

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} px+qy \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という関係式が作れる。さらに簡単に

$$\vec{y}=A\vec{x}$$

と書けるが，これは⑤や⑩と同じく等比数列の形をした式である。そして等比数列と同様にAの累乗を求める問題に帰着する。

そのためにAを標準化することを考える。

Aの固有方程式 $\begin{vmatrix} p-\lambda & q \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0$

すなわち　$\lambda^2-p\lambda-q=0$

(⑪に対応させるならば $\lambda^2=p\lambda+q$)

を解いたとき

[Ｉ]　$\lambda=\alpha,\ \beta\ (\alpha\neq\beta)$ ならば

$$A=\begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\alpha\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

[II]　$\lambda=\alpha$ (重解) ならば

$$A=\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

と変形できるのであった。(細部は省略する)

ここからAの累乗を求めれば漸化式の問題としては解決するが，このAによって⑪がどのように変形されるかを確かめることにする。

[Ｉ]のとき

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z-\beta w \\ -z+\alpha w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\beta y \\ -x+\alpha y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z-\beta w \\ z-\alpha w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\beta y \\ x-\alpha y \end{pmatrix}$$

ここで，⑪と⑫を比較し，さらに $w=x$ であった事を用いると，結局⑪は

$$\begin{cases} a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \\ a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \end{cases}$$

と2通りに変形できる。

[II]のとき，Ｉと同様にして⑪は

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-a_n)$$

と1通りに変形できる。

これで⑪の変形は完了するが，少し補足をしてみよう。§3で用いた行列Aは要するに

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

という事である。一方⑪より

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

であるが，この2つの式から

$$A^2\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=pA\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$=(pA+qE)\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

すなわち

$$A^2=pA+qE$$

という式が導かれる。行列は固有方程式に「代入」できるから(ケーリー・ハミルトンの定理)，これは当然の結果である。そして，ここに3項間漸化式とその特性方程式のつながりが行列を介して見えてくる。

《参考文献》

1)「線形代数入門」松坂和夫著　岩波書店

2)「行列再入門」石谷　茂著　現代数学社

(東京都立国立高等学校)