3次以下の整関数の定積分公式とその応用について

小野里（おのざと）　武久（たけひさ）

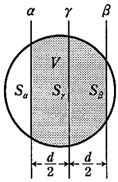
§1．はじめに

球を平行な2平面 α，β で切ったとき，この2平面ではさまれた部分の体積 V を，切り口の面積 S_α，S_β を用いて表すことはできないだろうかと考えました。そのためには，α，β から等距離にある平面 γ による切り口の面積 S_γ をつけ加えればよく

$$V=\frac{S_\alpha+4S_\gamma+S_\beta}{6}\cdot d \quad \cdots①$$

（d は2平面 α，β の距離）

が成り立つことがわかりました。



①式の一般化を考える過程で，次項で述べる公式に気づきましたが，これが実はシンプソンの公式にほかならないこと，長い間数値積分のための近似式だとばかり思っていた公式が，厳密に成り立つ場合もあることを再発見しました。(注1)　この公式に注目することで得るところも多いのではないかと思います。

§2．3次以下の整関数の定積分公式

公式　整関数 $f(x)$ が3次以下であるならば

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

$$=\frac{1}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}(b-a)$$

特に，$f(a)=f(b)=0$ ならば

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

証明は $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ などとおいて両辺を計算すればよく，よい練習問題となります。公式(1)は一見複雑な形に見えますが，

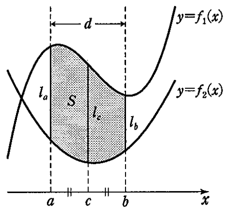
$$\frac{1}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}$$

は積分区間の下端，中央，上端の関数値を1：4：1の重みをつけて平均したものであり，$(b-a)$ は積分区間の幅ですから，意味はとりやすいと思います。

公式(1)を用いるのと普通に計算するのとで，それほど差はないようですが，計算結果を確認するための別の方法を与えるという意味があります。数学IIにあらわれる定積分はせいぜい3次までですから，用いる機会があるでしょう。さらに，面積や体積についてのいくつかの公式を，見通しよく導くためにも用いることができます。

§3．公式の応用

面積への応用



3次以下の関数で表された2つの曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ および直線 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ で囲まれた部分の面積 S を考えます。区間 $[a,\ b]$ において

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)\geqq 0$$

のとき

$$d=b-a,\quad l_a=f(a),\quad l_b=f(b),$$

$$l_c=f(c)\quad ただし\quad c=\frac{a+b}{2}$$

とすると，公式(1)から面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)dx=\frac{l_a+4l_c+l_b}{6}\cdot d \quad \cdots②$$

で求められます。

②式から導かれる次の3つの例を比較すると面白いと思います。いずれも $l_a=0$ の場合で，$l_b=l$ とおくと，②は次式となります。

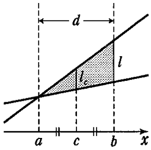
$$S=\frac{4l_c+l}{6}\cdot d$$

(i) 交わる2直線

$x=a$ の点を交点とすると，

$l_c=\dfrac{1}{2}l$ であるから

$$S=\frac{1}{2}ld$$



(ii) 放物線と接線

$x=a$ の点を接点とすると，$f_1(x)-f_2(x)$ は

$(x-a)^2$ に比例するから，$l_c=\dfrac{1}{4}l$ となり

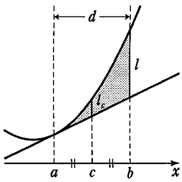
$$S=\frac{1}{3}ld$$

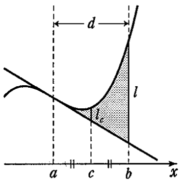
(iii) 3次曲線とその変曲点における接線

$x=a$ の点を変曲点とすると，$f_1(x)-f_2(x)$ は

$(x-a)^3$ に比例するから，$l_c=\dfrac{1}{8}l$ となり

$$S=\frac{1}{4}ld$$





特に公式(2)が適用できる場合計算は簡単になります。2つの放物線あるいは放物線と直線で囲まれた部分の面積 S は，共有点の x 座標を a，b $(a<b)$ とすると

$$S=\int_a^b\{-A(x-a)(x-b)\}dx, \quad A>0$$

という形で表されますが，公式(2)を用いると

$$S=\frac{2}{3}\left\{-A\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)\right\}(b-a)$$

$$=\frac{A}{6}(b-a)^3$$

が得られます。よく知られた，いわゆる「$\dfrac{1}{6}$ 公式」です。また，3次曲線とその接線で囲まれた部分の面積 S は，(接点の x 座標が b のとき)

$$S=\int_a^b A(x-a)(x-b)^2dx, \quad A>0$$

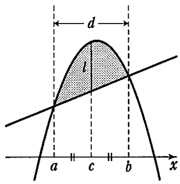
$$=\frac{2}{3}A\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2(b-a)$$

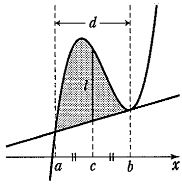
$$=\frac{A}{12}(b-a)^4$$

となります。これら2つの公式は，図のように l，d をとると，②において $l_a=l_b=0$ であることから

$$S=\frac{2}{3}ld$$

とまとめられます。





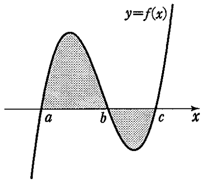
3次関数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a<b<c)$ において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた2つの部分の面積の和 S は

$$S=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c\{-f(x)\}dx$$

$$=\frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)-\frac{2}{3}f\left(\frac{b+c}{2}\right)(c-b)$$

$$=\frac{1}{12}(b-a)^3(2c-a-b)+\frac{1}{12}(c-b)^3(b+c-2a)$$

です。



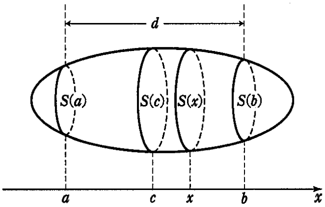
体積への応用

立体の，x 軸に垂直な平面による切り口の面積を $S(x)$ とし，$S(x)$ が3次以下の整関数である場合を考えます。2つの平面 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ ではさまれた部分の立体の体積 V は，公式(1)により

$$V=\int_a^b S(x)dx=\frac{S(a)+4S(c)+S(b)}{6}\cdot d \quad \cdots③$$

ただし　$c=\dfrac{a+b}{2}$,　$d=b-a$

となります。



楕円や双曲線の軸を x 軸とし，これらを x 軸のまわりに1回転してできる曲面と，x 軸に垂直な2つの平面で囲まれた立体の体積は，$S(x)$ が2次関数となりますから③式がそのまま適用できます。冒頭にあげた式①は，これと同じものです。

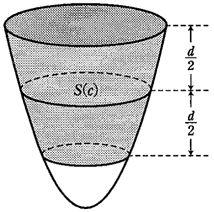
回転放物面では $S(x)$ が1次関数ですから

$$S(c)=\frac{S(a)+S(b)}{2}$$

となり

$$V=S(c)\cdot d$$

が得られます。



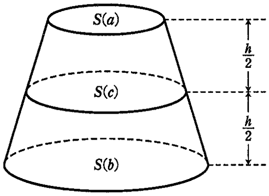
円錐台については，$S(x)$ が2次関数ですから底面の半径を r_a，r_b，高さを h とすると

$$S(a)=\pi r_a^2,\ S(b)=\pi r_b^2,\ S(c)=\pi\left(\frac{r_a+r_b}{2}\right)^2$$

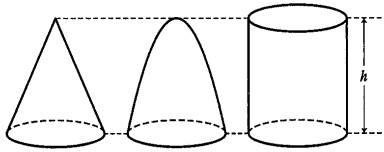
により体積は

$$V=\frac{\pi}{3}(r_a^2+r_ar_b+r_b^2)h$$

となります。



底面積が S で高さが h の円錐，回転放物面体(？)，円柱の体積は，高さ $\dfrac{h}{2}$ のところの断面積 S_c と S との関係から，次のようなきれいな比になります。



$S_c=\dfrac{1}{4}S$　　$S_c=\dfrac{1}{2}S$

$V=\dfrac{1}{3}Sh$　　$V=\dfrac{1}{2}Sh$　　$V=Sh$

公式(2)すなわち　$S(a)=S(b)=0$　である場合③は

$$V=\frac{2}{3}S(c)\cdot d$$

です。たとえば，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸のまわりに1回転してできる立体(回転楕円体)の体積は

$$V=\frac{2}{3}\pi b^2\cdot 2a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

となります。

§4．おわりに

2004年大学入試では，前期日程の東大理科と東工大に，球の一部の体積を求める問題がありました。次のような式をつくってから計算を進める方法も考えられます。

半径 r の球から，平面によって，厚さ d だけ切り取った部分の体積 V を求めます。式①より

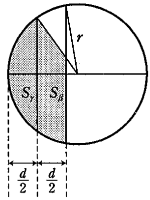
$$4S_\gamma+S_\beta=4\pi\left\{r^2-\left|r-\frac{d}{2}\right|^2\right\}+\pi\{r^2-|r-d|^2\}$$

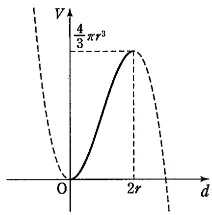
$$=4\pi\cdot\frac{d}{2}\left(2r-\frac{d}{2}\right)+\pi d(2r-d)$$

$$=\pi d(6r-2d)$$

$$V=\frac{4S_\gamma+S_\beta}{6}\cdot d=\frac{1}{3}\pi d^2(3r-d)\quad\cdots④$$

となります。





④式は上記の入試問題を解く上でそれほど大きな利点があるわけではありませんが，d の3次関数としてはきれいな形をしていて，例題としてもおもしろそうです。

ここで取り上げた公式は，その意味がとりやすいために，これまで述べたように様々な応用が考えられます。思考を刺激するような公式のひとつだということができます。

注1

『岩波数学辞典』の「数値積分法」の項による。

定積分 $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ の値を，$n+1$ 個の分点

$$x_i = x_0 + ih, \qquad h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

$$(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

における関数値 $f(x_i)$ の1次結合

$$\sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i) \quad (W_i \text{ は重み})$$

で近似したものが，n 次の Newton-Cotes の公式である。この公式は，$f(x)$ が n 次以下の多項式の場合に正確な積分値を与えるように重み W_i を定めたものに等しく，n が偶数のときには，$n+1$ 次多項式のときにも正確な積分値を与える。$n=2$ のとき，Simpson 則

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\}$$

が得られる。

《参考文献》

1)　岩波数学辞典　岩波書店

2)　2005全国大学入試問題正解　数学(国公立大編)　旺文社

(茨城県 清真学園)