円柱が直角に交わったときにできる立体の体積

篠原（しのはら） 幹郎（みきろう）

§0．はじめに

空間図形の問題に

「半径が同じ２つの円柱が，直角に交わったときにできる立体の体積を求めよ」

という問題がある。

これには，いくつかの解法があり，その変形は，大学の入試問題などで時々見かける。この問題を２つの方法で解いてみた。この解法はいろいろな参考書にあるものと同じである。

では，次の問題はどんなふうに解けるのか。

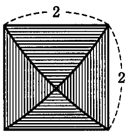
「半径が同じ３つの円柱が，直角に交わったときにできる立体の体積を求めよ」

いろいろな参考書を見たが見つからない。

それで，円柱が２つのときと同じように計算できないかと思って計算してみると，一応の結果がでたので，発表してみることにしました。

簡単のために，円柱の半径はすべて１にしてあります。

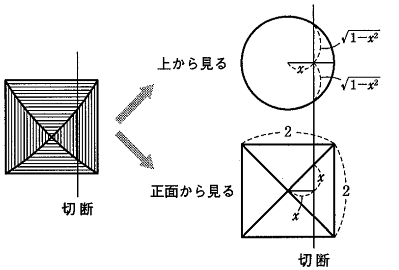
§1．２つの円柱が直角に交わったとき



このとき，立体は右のようになり，体積は $\frac{16}{3}$ となる。円に関係した体積なのに，π がでてこないのが，不思議といえば不思議である。

解１

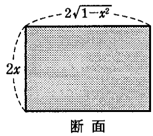
上の立体は次の２つの立体からなる。縦に切った断面は長方形になり，０から１まで積分して４倍すれば，体積Vが求められる。



$$V=4\int_0^1 2x\cdot 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

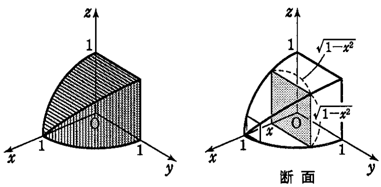
ここで，$1-x^2=t$ とおけば，

$$V=8\int_0^1 \sqrt{t}\,dt=\frac{16}{3}$$



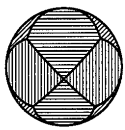
解２

その立体を次の図のように見れば，断面積が正方形となり，それを積分して８倍すれば，体積Vが求められる。



$$V=8\int_0^1 (1-x^2)\,dx=\frac{16}{3}$$

§2．３つの円柱が直角に交わったとき



３つの円柱が直角に交わったときの図形は右のようになり，その体積は $16-8\sqrt{2}$ となる。このときも，π はでてこない。小数に直せば，

$$16-8\sqrt{2}=4.862\cdots$$

となる。

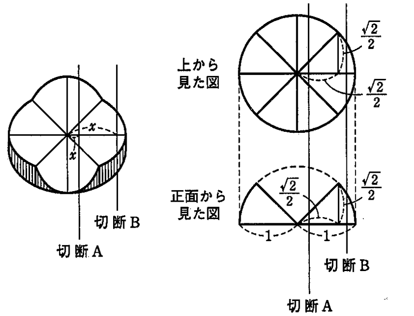
解1 **縦に切断したとき**

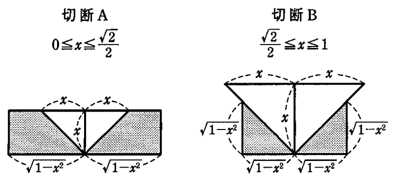
もとの図形は次の図形6個からなり，断面の形は

0 から $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ まで（切断A）

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から 1 まで（切断B）

で異なり，それを12倍すれば体積 V が求められる。





$$V=12\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x\sqrt{1-x^2}-x^2)dx+12\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=12\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x\sqrt{1-x^2})dx-12\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2dx+12\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1(1-x^2)dx$$

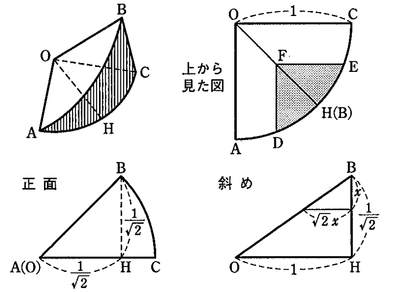
ここで，最初の積分は $1-x^2=t$ とおけば，

$$=12\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{t}\,dt-4\Big[x^3\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+12\Big[x-\frac{x^3}{3}\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1$$

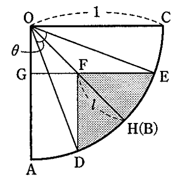
$$=16-8\sqrt{2}$$

解2 **水平に切断したとき**

求める体積は，次の図形を24個集めて作られる。それを水平に切って，0 から $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ まで積分する。



簡単のために $\mathrm{FH}=\sqrt{2}x=l$ とおけば，上から見た図はつぎのようになる。



断面積 S は，図形FDEの面積であり，直角二等辺三角形DEFに図形DEHを足せば良い。

図形DEHは，扇形ODEから三角形ODEを引けば良い。

ここで，

$$\mathrm{EF}=\mathrm{EG}-\mathrm{FG}=\sqrt{1-\left(\frac{1-l}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{1-l}{\sqrt{2}}$$

また，

$$\mathrm{DE}=\sqrt{2}\,\mathrm{EF}=\sqrt{1+2l-l^2}+l-1$$

角DOEを θ とすれば，余弦定理により

$$\cos\theta=1-\frac{\mathrm{DE}^2}{2}=(1-l)\sqrt{1+2l-l^2}$$

また，三角形ODEの面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DE}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{DE}}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{1+2l-l^2}+l-1)\sqrt{2-2(l-1)\sqrt{1+2l-l^2}}$$

となるから，断面積 S は

$S=(\text{扇形 ODE})-(\triangle\text{ ODE})+(\triangle\text{ DEF})$

$$=\frac{1}{2}\cos^{-1}\{(1-l)\sqrt{1+2l-l^2}\}$$

$$-\frac{1}{4}(\sqrt{1+2l-l^2}+l-1)\sqrt{2-2(l-1)\sqrt{1+2l-l^2}}$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-l)\sqrt{1+2l-l^2}$$

となる。

ここで，$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 S dl$ となることに注意する。断面積Sの１つ１つの積分は一見不可能のように見えるが，計算することができる。そのために，２つの補題を用意する。

> **（補題１）**
> $$\int_0^1 \cos^{-1}\{(1-x)\sqrt{1+2x-x^2}\}dx = 2\sqrt{2}-2$$

$\boxed{\text{証明}}$

$\cos^{-1}\{(1-x)\sqrt{1+2x-x^2}\} = t$ とおけば

$(1-x)\sqrt{1+2x-x^2} = \cos t$ …①

両辺を微分してまとめれば

$$\frac{2x^2-4x}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = -\sin t dt \quad \cdots②$$

また①より

$$\begin{aligned}\sin t &= \sqrt{1-\cos^2 t}\\ &= \sqrt{1-(1-x)(1+2x-x^2)}\\ &= 2x-x^2\end{aligned}$$

よって，②に代入して計算すれば

$$dx = \frac{\sqrt{1+\sin x}}{2}dt$$

となるから

$$\int_0^1 \cos^{-1}\{(1-x)\sqrt{1+2x-x^2}\}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sqrt{1+\sin t}}{2}dt$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+\sin t}\,dt &= \int\sqrt{1+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\,dt\\ &= \int\sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2}\,dt\\ &= 2\sin\frac{t}{2}-2\cos\frac{t}{2}+C\end{aligned}$$

となるから，部分積分を使って

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sqrt{1+\sin t}\,dt &= \left[t\left(2\sin\frac{t}{2}-2\cos\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &\quad -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin\frac{t}{2}-2\cos\frac{t}{2}\right)dt\\ &= -\left[-4\cos\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 4\sqrt{2}-4\end{aligned}$$

よって，両辺を２で割れば求める値が得られる。

$\boxed{\text{終}}$

> **（補題２）**
> $$\int_0^1(\sqrt{1+2x-x^2}+x-1)\sqrt{2-2(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$$
> $$=\frac{4}{3}$$

$\boxed{\text{証明}}$

次の式が成り立つ。

$$\{\sqrt{1+2x-x^2}-(x-1)\}^2 = 2-2(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}$$

よって

$$\begin{aligned}&\int_0^1(\sqrt{1+2x-x^2}+x-1)\sqrt{2-2(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx\\ &=\int_0^1(\sqrt{1+2x-x^2}+x-1)\{\sqrt{1+2x-x^2}-(x-1)\}dx\\ &=\int_0^1(-2x^2+4x)dx = \frac{4}{3}\end{aligned}$$ $\boxed{\text{終}}$

また

$$\int_0^1\sqrt{1+2x-x^2}(1-x)dx = \int_1^2\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

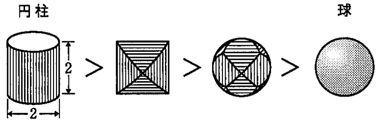
となるから，補題１，補題２により，体積Vは

$$V = \frac{24}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-2)-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\right\} = 16-8\sqrt{2}$$

となる。

§３．おわりに

高さが２で半径が１の円柱を削って，二つの円柱が交わったときの図形ができ，それをさらに削って，三つの円柱が交わったときの図形ができる。その体積は球よりは大きく，さらに角度を変えて削っていけば，球の体積に近づいていく。図で表せば次のようになる。



2π	>	$\frac{16}{3}$	>	$16-8\sqrt{2}$	>	$\frac{4}{3}\pi$
6.28…	>	5.33…	>	4.86…	>	4.18…

（栃木県立栃木南高等学校）