連立方程式を解きたくない

楠田（くすだ）　貴至（たかし）

§0．はじめに

私は以前から連立方程式を解くのが面倒くさくて嫌いである。たとえそれが2元の1次方程式であろうと。まして，3元の連立など(たとえ1次でも)面倒くささが先にたつのである。例えば，「直線に関して対称な点の座標を求める」など座標を求める場合に連立方程式を解くことはよくあるが，これはベクトルを使うなどすれば，連立方程式を解かなくてもできなくはない。そのような座標を求めるものではないもので普通は連立方程式を解かなくてはならない問題に対して，私のものぐさから出たアイデアを紹介したいと思う。

§1．多項式を割ったときの余り

1つめは次の問題である。

> **問題1**
> 多項式 $P(x)$ を $x-1$，$x+2$ で割った余りがそれぞれ5，-1 である。$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ。

普通は，次のように解く。

$P(x)$ を2次式 $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

この等式より　$P(1)=a+b$，$P(-2)=-2a+b$

また，

$x-1$ で割った余りが5であるから　$P(1)=5$

$x+2$ で割った余りは -1 であるから　$P(-2)=-1$

よって　$a+b=5$，$-2a+b=-1$

これを解くと　$a=2$，$b=3$

したがって，求める余りは　$2x+3$

このように，1次の連立方程式を解くのだが，これに対して，

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが5であるから，そのときの商を $q(x)$ としてやると，

$$P(x)=(x-1)q(x)+5 \quad \cdots①$$

が成り立つ。

次に，$P(x)$ を $x+2$ で割った余りが -1 であるから

$$P(-2)=-1$$

①の両辺に $x=-2$ を代入して

$$P(-2)=-3q(-2)+5=-1$$

すなわち，$q(-2)=2$

よって　$q(x)=(x+2)Q(x)+2$ …②　($Q(x)$ は整式)

①に②を代入すると

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)\{(x+2)Q(x)+2\}+5\\&=(x-1)(x+2)Q(x)+2(x-1)+5\\&=(x-1)(x+2)Q(x)+2x+3\end{aligned}$$

となり，これは $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りが，$2x+3$ であることを示している。

とすれば，連立方程式を解かなくてもすむ。

§2．3点を通る円

2つめは3元連立の次の問題である。

> **問題2**
> 次の3点を通る円の方程式を求めよ。
> A(3，1)，B(6，-8)，C(-2，-4)

これも普通には，次のように解くでしょう。

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点Aを通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

点Bを通るから　$6^2+(-8)^2+6l-8m+n=0$

点Cを通るから　$(-2)^2+(-4)^2-2l-4m+n=0$

整理すると

$$3l+m+n+10=0$$
$$6l-8m+n+100=0$$
$$2l+4m-n-20=0$$

これを解いて　$l=-6$，$m=8$，$n=0$

よって，求める円の方程式は

$$x^2+y^2-6x+8y=0$$

今度は，３元の連立方程式を解かなくてはならない。
これを次のようにやると
２点Ａ，Ｂを直径の両端とする円の方程式

$$x^2+y^2-9x+7y+10=0$$

と，２点Ａ，Ｂを通る直線の方程式

$$3x+y-10=0$$

から

$$(x^2+y^2-9x+7y+10)+k(3x+y-10)=0$$

は２点Ａ，Ｂを通る円を表す。
これが，点$C(-2,\ -4)$を通ることから，代入して

$$(4+16+18-28+10)+k(-6-4-10)=0$$

よって　$k=1$
したがって求める円の方程式は

$$(x^2+y^2-9x+7y+10)+1\cdot(3x+y-10)=0$$

より，　$x^2+y^2-6x+8y=0$
やはり，連立方程式を解かなくてもよい。
２点を直径の両端とする円は公式

> ２点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を直径の両端とする円の方程式は
>
> $$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

ですぐ求まるし，２点を通る直線など言わずもがなである。

もっとも，３点の座標をよく見て，２点が軸に平行なものである場合などそれらを用いて，より簡潔にすることが大事である。

§３．３点を通る放物線

§２については，「２つの円の交点と，もう１点を通る円を求める」とかの曲線の２交点を通る曲線群を使うアイデアで，教科書や参考書でもおなじみのものであったが，３点を通る放物線についてはそのようなものがない。

> **問題３**
> ２次関数のグラフが３点$(2,\ -2)$，$(3,\ 5)$，$(-1,\ 1)$を通るとき，この２次関数を求めよ。

まずは，普通にやると以下のようになる。
求める２次関数を　$y=ax^2+bx+c$　とする。
グラフが３点$(2,\ -2)$，$(3,\ 5)$，$(-1,\ 1)$を通るから

$$-2=4a+2b+c$$
$$5=9a+3b+c$$
$$1=a-b+c$$

これを解いて　$a=2,\ b=-3,\ c=-4$
よって，求める２次関数は　$y=2x^2-3x-4$
これも３元の連立方程式は避けられない。ところが，§１と§２を合わせたような方法で，求める放物線の式をうまくおくことによって，これを避けることができるのである。
２点$(2,\ -2)$，$(3,\ 5)$を通る直線 $y=7(x-2)-2$ と，この２点$(2,\ -2)$，$(3,\ 5)$のx軸上への正射影$(2,\ 0)$，$(3,\ 0)$を通る放物線 $y=a(x-2)(x-3)$ を考えると，次の式はこの２点を通る放物線を表す。

$$y=a(x-2)(x-3)+7(x-2)-2$$

これが残りの点$(-1,\ 1)$を通ることから代入して

$$1=a(-1-2)(-1-3)+7(-1-2)-2$$
$$\therefore\quad a=2$$

したがって求める２次関数は

$$y=2(x-2)(x-3)+7(x-2)-2$$

より　$y=2x^2-3x-4$
実際には，いきなり

> ２点$(2,\ -2)$，$(3,\ 5)$を通る放物線を次のようにおく。
>
> $$y=a(x-2)(x-3)+7(x-2)-2$$
>
> (以下省略)

というように始めて良いし，勿論

> ２点$(2,\ -2)$，$(3,\ 5)$を通る放物線を次のようにおく。
>
> $$y=a(x-2)(x-3)+7(x-3)+5$$
>
> (以下省略)

としても構わない。
さらに

> **問題４**
> 放物線 $y=x^2+2x-3$ を平行移動した曲線で，２点$(-1,\ 6)$，$(3,\ 2)$を通る２次関数を求めよ。

のような問題に対しても，普通は
求める２次関数は，そのグラフが $y=x^2+2x-3$ を平行移動したものであるから，
$y=x^2+bx+c$ とおける。
このグラフが２点$(-1,\ 6)$，$(3,\ 2)$を通ることから

$$6=(-1)^2+b(-1)+c$$
$$2=3^2+b\cdot3+c$$

整理して　$-b+c=5$

$$3b+c=-7$$

これを解いて　$b=-3$，$c=2$

したがって　$y=x^2-3x+2$

というように，やはり連立方程式を解くことになるが，先のアイデアを使うと

> 求める2次関数は，x^2 の係数が1だから，
> $$y=(x+1)(x-3)-(x+1)+6$$
> すなわち
> $$y=x^2-3x+2$$
> である。

というように一気に答が書き下せてしまう。

ところで，3点を通る放物線の式を求めるときに，そのうちの2点が x 軸上の点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ である場合には求める放物線の式を

$$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

とおいてやることは定石となっている。これは先の特別な場合であり，このことからも，この場合をも含んだものとして以下のように定式化してよいのではないか。またその解法が一般的なものとして認められてよいのではないか。

> **【定式】**
> 2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る放物線の式は
> $$y=a(x-x_1)(x-x_2)+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$$
> である。　(ただし，$a\neq0$)

上記**【定式】**は，その形から「2点を通ること」，「放物線であること」を満たしているのは明らかなので「2点を通る放物線」に違いないのだが，次のような意味付けも可能である。

放物線と直線

$$y=ax^2+bx+c \quad \cdots①$$
$$y=mx+k \quad \cdots②$$

が2点で交わるとき，その交点の x 座標を α，β とすると，①，②から y を消去した2次方程式

$$ax^2+bx+c=mx+k$$

すなわち，

$$ax^2+bx+c-(mx+k)=0$$

の解が α，β ということだから

$$ax^2+bx+c-(mx+k)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

が成り立つ。

すなわち，

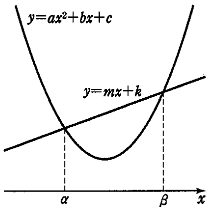
$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)+(mx+k)$$

である。したがって，

$y=ax^2+bx+c$ は，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)+(mx+k)$ であるというのが【定式】である。

こちらの方が，出所がはっきりしていて納得しやすい向きもあろうかと思う。

このように【定式】を見ると，「放物線と直線に囲まれる部分の面積」を求める問題について新たな考察ができるが，それについては後の§6で取り上げた。



§4．足し算のグラフ

「数学Ⅲ」で微分を使って色々なグラフを描くことをやるが，グラフそのものを描く問題ではないときに「足し算」のグラフということで，微分せずに概形を描くことがある。例えば $y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフは $y=x$ と $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを足すことによってその概形を描くことができる。

これを利用したものが，§3で定式化したものである。この**【定式】**(左段参照)は，

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \text{ と } y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$$

をあわせたものになっているのである。

このことを利用・拡張していくと以下のような展開や応用，新しい見方ができる。

§5．剰余の定理再考

> **問題5** ($p.6$ の問題1を再掲)
> 多項式 $P(x)$ を $x-1$，$x+2$ で割った余りがそれぞれ5，-1 である。$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ。

この問題を解くときに「余りは高々1次であるから $P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$ とおける」と始めるところは，2点 $(1,\ 5)$，$(-2,\ -1)$ を通る曲線として $y=P(x)$ を考えると，

「$y=P(x)$ のグラフは，$y=(x-1)(x+2)Q(x)$ のグラフと $y=ax+b$ のグラフの足し算のグラフである」

ということになる。これは**【定式】**で $a=Q(x)$ としたものに他ならない。

つまり「2点 $(1,\ 5)$，$(-2,\ -1)$ を通る曲線として $y=P(x)$ を考える」と，「$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余り」というのは「2点 $(1,\ 5)$，$(-2,\ -1)$ を通る直線」で $y=\dfrac{-1-5}{-2-1}(x-1)+5$ の右辺 $2x+3$ に等しくなる。

すなわち，最初から

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+2(x-1)+5$$

のように，一気に書けて終わってしまうのである。

そうすると，今はあまり見かけなくなった次のような問題も同じようにできる。

> **問題6**
> 整式 $P(x)$ を $x-1$，$x-2$，$x-3$ で割ったときの余りがそれぞれ2，3，6である。
> $P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

これも「3点 $(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 6)$ を通る曲線として $y=P(x)$ を考える」と，

「$P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余り」というのは「3点 $(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 6)$ を通る放物線」だということになる。余りは高々2次なので

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$$

とおける。

$y=ax^2+bx+c$ とすると，これが3点 $(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 6)$ を通るようにすればよいから

$$y=a(x-1)(x-2)+(x-1)+2$$

とおいて $(3,\ 6)$ を代入し，a を求めると $a=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ y&=(x-1)(x-2)+(x-1)+2\\&=x^2-3x+2+x+1\\&=x^2-2x+3\end{aligned}$$

というように，余りを求めるのに，後半**【定式】**が使える。

§6．放物線と直線に囲まれる部分の面積

> **問題7**
> a を正数とする。放物線 $y=ax^2+bx+c$ は2点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 2)$ を通るという。この放物線と2点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 2)$ を通る直線で囲まれた図形の面積が4になるように a の値を求めよ。
> 〔97　慶応大・経　一部改〕

この問題は，まずは普通には次のように解く。

2点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 2)$ を通る直線は，

$$y=\frac{1}{2}(x-1)+1$$

であるから，囲まれる図形の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_1^3\left\{\frac{1}{2}(x-1)+1-(ax^2+bx+c)\right\}dx\\&=-\int_1^3 a(x-1)(x-3)dx\\&=-a\int_1^3(x-1)(x-3)dx\\&=a\times\frac{(3-1)^3}{6}\\&=\frac{4a}{3}\end{aligned}$$

これが4になることから $\dfrac{4a}{3}=4$

$$\therefore\ a=3$$

この中で

$$\int_1^3\left\{\frac{1}{2}(x-1)+1-(ax^2+bx+c)\right\}dx$$
$$=-\int_1^3 a(x-1)(x-3)dx$$

の部分が生徒にはわかりにくいところであろう。

ところが，先の**【定式】**を用いてやると，以下のように，このわかりにくい部分がはっきりとする。

2点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 2)$ を通る放物線は，

$$y=a(x-1)(x-3)+\frac{1}{2}(x-1)+1\quad\cdots①$$

とおける。

また，2点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 2)$ を通る直線は，

$$y=\frac{1}{2}(x-1)+1\quad\cdots②$$

であるから，①と②に囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_1^3\left[\frac{1}{2}(x-1)+1-\left\{a(x-1)(x-3)+\frac{1}{2}(x-1)+1\right\}\right]dx$$

$$=-\int_1^3 a(x-1)(x-3)\,dx$$

$$=-a\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx$$

$$=a\times\frac{(3-1)^3}{6}$$

$$=\frac{4a}{3}$$

これが 4 になることから　$\frac{4a}{3}=4$

$$\therefore\ a=3$$

§7．おわりに

§1 および§2 に関しては，そのもともとの定義やアイデアの別の使い方，あるいは別の面から見たもので，教科書の延長線上で自然に指導できるものであるが，§3 についてはまったく「ものぐさの工夫」としか言いようのないものである。

しかし，元来，数学は少しでも楽をしたいがために「楽な方法」，「簡単なやり方」を工夫していくものであると，またそれを楽しむものであると考えている。そしてそれが§2 のような自然な延長線上のアイデアであることもあれば，§3 のようないきなりのアイデアである場合もあるのだと言うことを，生徒が感じ取れるよう，またそれがうまく伝わるような授業をしていきたい。

その中で，§6 のように，ちょっとしたわかりにくさの間隙を埋めるようなものであればよいなということを思っています。いたずらに瑣末な，小手先のテクニックに走ることを望むものではありません。

《参考文献》

1)「新編　数学Ⅰ」数研出版
2)「新編　数学Ⅱ」数研出版
3)「新課程　チャート式　基礎と演習　数学Ⅰ＋A」チャート研究所　編著　数研出版
4)「新課程　チャート式　解法と演習　数学Ⅱ＋B」チャート研究所　編著　数研出版
5)「1997 入試問題集　数学Ⅰ・Ⅱ・A・B(文理系)」数研出版
6)「ジュニア・セレクト　Ⅰ・解・代・確(四訂版)」数研出版

(兵庫県立武庫荘総合高等学校)