数列の和に関する新しい応用問題について

ーある美しい数字の配列をもとにしてー

仁平 政一（にへい まさかず）

§1．はじめに

初項 a，公比 r の等比数列の初めの n 項の和は，

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}\quad(r\neq1)$$

とおくとき，

$$rS_n=ar+ar^2+\cdots+ar^n$$

をつくり，これらの２つの式の差をとることにより求めることができる。

この方法は，高校生にとって魅力的なアイディアであり，教師の立場からすれば，ぜひ身に付けさせたい手法の一つである。

ところが，多くの教科書や高校生の参考書等で取り上げられている上記と同じ構造を持つ問題は

$$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}\quad(x\neq1)$$

程度であり，思いのほか少ない。

そこで，ある美しい数字の配列を元にして，上記のアイディアに習熟させることができるような教材開発を試みた。それを紹介しよう。

§2．ある美しい数字の配列から生まれる教材

つぎの美しい数字の配列

$$123456789\times9+10=1111111111\quad\cdots\cdots①$$

はよく知られている事実である〔参考文献1）参照〕。

このことを電卓等で確かめるだけでは，パズル的な楽しさを味わうだけで終わってしまう。

ところが，①を「N進法では」という視点で捉えると，一般に $N(N\geqq2)$ 進法でも成り立つだろうかという疑問が自然に湧き起こる。

ここで，N進法での表記を強調して，①の左辺を書き表せば

$$(1\cdot10^8+2\cdot10^7+\cdots+9\cdot10^0)\times(9\cdot10^0)+1\cdot10^1\quad\cdots②$$

となる。

さっそく，①が他の進法で成り立つかどうかを確かめてみよう。２進法や３進法でもよいが，一般化を視野に入れると簡単すぎるので，10進法に近い9進法で調べてみる。そのためには

$$(12345678)_{(9)}\times8_{(9)}+10_{(9)}=111111111_{(9)}\quad\cdots③$$

が成り立つことを確認すればよい。ここに，$a_{(N)}$ は，数字 a がN進法で表されていることを意味している。10進法以外のときはこの記法を用いることにする。

9進法なので，10進法とは異なり電卓等でただちに確かめるというわけにはいかない。そこで，③を確かめるためには

$$(1\cdot9^7+2\cdot9^6+\cdots+8\cdot9^0)\times(8\cdot9^0)+1\cdot9^1$$
$$=1\cdot9^8+1\cdot9^7+\cdots+1\cdot9^1+1\cdot9^0\quad\cdots\cdots④$$

が成り立つことを示せばよい。

いま，④の左辺の括弧内の和を

$$S=8\cdot9^0+7\cdot9^1+\cdots+2\cdot9^6+1\cdot9^7\quad\cdots\cdots⑤$$

とおくと

$$9S=8\cdot9^1+7\cdot9^2+\cdots+2\cdot9^7+1\cdot9^8\quad\cdots\cdots⑥$$

となる。⑥から⑤を引くことにより

$$S=\frac{9(9^8-1)}{8^2}-1$$

が得られる。④の左辺をTとおくと

$$T=S\cdot8+9=\frac{9^9-1}{8}=\frac{9^9-1}{9-1}$$
$$=1\cdot9^8+1\cdot9^7+\cdots+1\cdot9^1+1\cdot9^0$$

となり④が示された。

このことは，証明の方針も含めて一般化出来ることを示唆する。実際，つぎの定理が成り立つ〔参考文献1）参照〕。

> **〔定理１〕** $N(N\geqq2)$ 進法において，０以外のすべての数字を小さい順から並べ，その数に進法の数より１少ない数字（$N-1$）をかけ，その進法の数N(すなわち10)を加えたものは，１をその進数の個数（すなわちN個）だけ並べた数に等しい。

(証明) $N(N\geqq2)$ 進法において，０以外のすべての数字を小さい順に並べた数字は

$$N^{N-2}+2N^{N-3}+\cdots+(N-3)N^2+(N-2)N+(N-1)$$

となる。いま，この和をSとおく。

ここで和Sを求めよう。

$$S=(N-1)+(N-2)N+\cdots+2N^{N-3}+N^{N-2} \quad \cdots\cdots⑦$$

$$NS=(N-1)N+(N-2)N^2+\cdots+2N^{N-2}+N^{N-1} \quad \cdots\cdots⑧$$

⑧－⑦から

$$\begin{aligned}(N-1)S&=-(N-1)+N+N^2+\cdots+N^{N-2}+N^{N-1}\\&=-(N-1)+\frac{N(N^{N-1}-1)}{N-1}\\&=\frac{N^N-N^2+N-1}{N-1}\end{aligned}$$

を得る。$N\geqq 2$ であるから

$$S=\frac{N^N-N^2+N-1}{(N-1)^2}$$

が得られる。ここで，求める数をAとおくと

$$\begin{aligned}A&=S(N-1)+N\\&=\frac{(N^N-N^2+N-1)(N-1)}{(N-1)^2}+N\\&=\frac{N^N-1}{N-1}\\&=N^{N-1}+N^{N-2}+\cdots+N+1\end{aligned}$$

となり，定理は証明された。

念のため例をあげれば，

3進法では $(12)_{(3)}\times 2_{(3)}+10_{(3)}=111_{(3)}$,

8進法では $(1234567)_{(8)}\times 7_{(8)}+10_{(8)}=11111111_{(8)}$

が成り立つ。

次に，定理1では，進法の数Nを加えて1をN個並べた数が得られたが，Nを加えないで類似の結果が得られるかどうかについて考察してみよう。

定理1に類似する場合は，その証明の最後の部分から

$$(N^{N-3}+a_1N^{N-4}+\cdots+a_{N-4}N+a_{N-3}N^0)(N-1)=\frac{N^{N-1}-1}{N-1} \quad \cdots\cdots⑨$$

を満たすような非負の整数 $a_i(1\leqq i\leqq N-3)$ が存在するかどうかを調べればよいことがわかる。ここで，具体的な場合について調べてみよう。

4進法の場合は，⑨から

$$(4+a_1)3=\frac{4^3-1}{4-1}$$

となり，$a_1=3$，すなわち $(13)_{(4)}\times 3_{(4)}=111_{(4)}$ が得られる。

5進法の場合も，

$$(1\cdot 5^2+a_15+a_2)4=\frac{5^4-1}{5-1} \quad (a_1<a_2)$$

より，$a_1=2$，$a_2=4$，すなわち $(124)_{(5)}\times 4_{(5)}=1111_{(5)}$ が得られる。

これらのことから，10進法においては

$$12345679\times 9=111111111$$

が成り立つであろうことが予想でき，そのことはただちに電卓などで確かめることができる。

実際，次の定理が成り立つことが知られている〔参考文献1）参照〕。

> **〔定理2〕** Nは3以上の整数とする。N進法において，0と進法より2少ない数字（すなわち$N-2$）以外のすべての数字を小さい順から並べ，その数に進法の数より1少ない数字（$N-1$）をかければ，1をその進数より1少ない個数（すなわち $N-1$ 個）だけ並べた数に等しい。

§3．おわりに

数列の和に関する応用問題の中で，

$123456789\times 9+10=1111111111$,

$12345679\times 9=111111111$,

$(1234567)_{(8)}\times 7_{(8)}+10_{(8)}=11111111_{(8)}$,

$(124)_{(5)}\times 4_{(5)}=1111_{(5)}$

などのような美しい数字の配列に出合うことは，生徒に一種の感動を与えることができよう。

また，10進法以外の数について成り立つことを確かめるためには，電卓などを利用することができないので，等比数列の和を求める方法を用いることが必要となり，そのことを通して，その手法を十分に身につけることが期待できる。教材としての価値は十分あると考える。

《参考文献》

1）足羽　雄郎「N進法におけるきれいな数字の並びの計算」初等数学第36号（1999年3月），*pp.*30～31

（茨城県常総学院高等学校，茨城大学工学部）