曲線と接線について

坂本　茂（さかもと　しげる）

§1．はじめに

曲線の接線とは1点で曲線に触れている直線であるが，様々に考えられてきた。円Oの円周上の点Aにおける接線は，点Aを通り半径OAに垂直な直線で定義される。放物線上の点Aにおける接線は，放物線の方程式と点Aを通る直線の方程式とを満たす解が重解になるときをもって定義できる。この定義は円の接線でも通用するように，代数式で表される曲線の接線は重解によって定義できる（これについてはNo. 38拙稿「極限概念を用いない導関数の定義」を参照されたい）。

一般的には曲線上の点Aにおける接線は，曲線上の別の点Bをとり，BがAに近づくときの直線ABの極限で定義される。微分法によれば

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)}$$

である。あるいは

曲線 $f(x,\ y)=0$ 上の点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{f_x(x_1,\ y_1)(x-x_1)+f_y(x_1,\ y_1)(y-y_1)=0}$$

で与えられる。以下曲線における接線を考察してみたい。

§2．接線の方程式

曲線上の点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を考える。例えば円 $x^2+y^2=r^2$ の場合にはよく知られているように $x_1x+y_1y=r^2$ である。これは微分法を用いなくても2直線の垂直条件あるいは方程式における重解によって得ることができる。他の曲線における接線もこの形式で表せないだろうか。

簡単な計算から，楕円，双曲線を含めた曲線について，次の結果を得る。

(1)　曲線 $\dfrac{x^n}{a}+\dfrac{y^n}{b}=1$,

接線 $\dfrac{x_1{}^{n-1}x}{a}+\dfrac{y_1{}^{n-1}y}{b}=1$

次は曲線の方程式に xy の項を含んだ例である。

(2)　曲線 $x^2+xy+y^2=c$,

接線 $x_1x+\dfrac{x_1y+y_1x}{2}+y_1y=c$

更に x と y の次数が異なる場合を考察しよう。まず放物線では

(3)　曲線 $y^2=4px$，接線 $y_1y=4p\dfrac{x+x_1}{2}$

(4)　曲線 $y=ax^2+bx+c$,

接線 $\dfrac{y+y_1}{2}=ax_1x+b\dfrac{x_1+x}{2}+c$

となる。一般に n 次関数では

(5)　曲線 $y=\sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^{n-k}$,

接線 $y+(n-1)y_1$

$$=\sum_{k=0}^{n} a_k\{(n-k)x_1{}^{n-k-1}x+kx_1{}^{n-k}\}$$

(証明)　導関数は $y'=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(n-k)x^{n-k-1}$ であり，

また $y_1=\sum\limits_{k=0}^{n} a_kx_1{}^{n-k}$ より接線の方程式

$$y-y_1=\{\sum_{k=0}^{n} a_k(n-k)x_1{}^{n-k-1}\}(x-x_1)$$

は(5)の接線のように変形される。

ここまでで，ある種の規則性が見て取れる。すなわち基準とする x^n の項は $x_1{}^{n-1}x$ となるのに対し x^m の項は $x_1{}^{m-1}x$，$x_1{}^m$ の係数を $m:n-m$ に分ける式になっていて，y についての項も同様である。更に調べてみよう。

(6)　曲線 $y=ax^n$,

接線 $\dfrac{y+(n-1)y_1}{n}=ax_1{}^{n-1}x$

(7)　曲線 $y^m=ax^n$,

接線 $\dfrac{my_1{}^{m-1}y+(n-m)y_1{}^m}{n}=ax_1{}^{n-1}x$

以上は右辺を基準にした式である。

(8) 曲線 $x^m y^n = a$,

接線 $\dfrac{m y_1{}^n x_1{}^{m-1} x + n x_1{}^m y_1{}^{n-1} y}{m+n} = a$

しかし(8)の接線はこの形式ではなく簡単に

$m\dfrac{x-x_1}{x_1} + n\dfrac{y-y_1}{y_1} = 0$ と表される。

(9) 曲線 $4(x^2+y^2-a^2)^3 = 27a^4x^2$,

接線 $4(x_1x+y_1y-a^2)^3 = a^4(x_1{}^{-\frac{1}{3}}x + 2x_1{}^{\frac{2}{3}})^3$

これは左辺を基準にしている。次に曲線 $ax^m + by^n = c$ の接線を ax^m の項を基準に表せば

$$a x_1{}^{m-1} x + b\frac{n y_1{}^{n-1} y + (m-n) y_1{}^n}{m} = c$$

となる。曲線 $x^n + x^m y^k = c$ の接線を x^n の項を基準に表せば

$$x_1{}^{n-1} x + \frac{m x_1{}^{m-1} y_1{}^n x + k x_1{}^m y_1{}^{k-1} y + (n-m-k) x_1{}^m y_1{}^k}{n} = c$$

であるが，$x^m y^k$ の項を基準とする接線の方程式は次のようになる。

$$\frac{n x_1{}^{n-1} x + (m+k-n) x_1{}^n}{m+k} + \frac{m x_1{}^{m-1} y_1{}^n x + k x_1{}^m y_1{}^{k-1} y}{m+k} = c$$

このように代数式で表された曲線上の点 $A(x_1, y_1)$ における接線の方程式は形式的に作ることができ，円における接線の方程式と同様に役立つこともあろう。

曲線 $f(x, y)=0$ を x 軸方向に k，y 軸方向に ℓ だけ平行移動することは，曲線 $f(x, y)=0$ 上の点 $A(x, y)$ が移動して点 $B(x+k, y+\ell)$ に移ることである。方程式 $f(x, y)=0$ は点 $A(x, y)$ の満たす式であり，平行移動された曲線の方程式は点 $B(x, y)$ の満たす式である。$B(x, y)$ の満たす式は，平行移動される前の点 $B(x-k, y-\ell)$ が方程式 $f(x, y)=0$ を満たす式であるといえる。したがって，平行移動された曲線の方程式は $f(x-k, y-\ell)=0$ である。

曲線 $f(x, y)=0$ 上の点 (x_1, y_1) すなわち $f(x_1, y_1)=0$ を満たす点における接線を x，y の一次式 $\varphi(x, y, x_1, y_1)=0$ とする。x 軸方向に k，y 軸方向に ℓ だけ平行移動した曲線 $f(x-k, y-\ell)=0$ において $f(x_1-k, y_1-\ell)=0$ を満たす曲線上の点 (x_1, y_1) での接線の方程式は $\varphi(x-k, y-\ell, x_1-k, y_1-\ell)=0$ である。

同様に，x 軸方向に k 倍，y 軸方向に ℓ 倍だけ拡大・縮小した曲線は $f\left(\dfrac{x}{k}, \dfrac{y}{\ell}\right)=0$ であるが，この曲線上の点 (x_1, y_1) における接線は $\varphi\left(\dfrac{x}{k}, \dfrac{y}{\ell}, \dfrac{x_1}{k}, \dfrac{y_1}{\ell}\right)=0$ である。例えば円の接線の式から楕円の接線の式が得られる (No. 29 拙稿「拡大・縮小，平行移動された関数」を参照)。

§3．接線の本数

微分可能な連続関数 $y=f(x)$ のグラフに任意の点Pから何本の接線を引くことができるか考察する。曲線 $y=f(x)$ 上の接点を $T(t, f(t))$ とすると，この接点Tにおける接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t) \qquad \text{である。}$$

$$F(t)=y-f(t)-f'(t)(x-t)$$

とすると，t の方程式 $F(t)=0$ の解の個数が点 $P(x, y)$ から曲線 $y=f(x)$ に可能な接線を引くとき，すべての接点の個数である。方程式 $F(t)=0$ の解の個数は t の関数 $F(t)$ の極値の符号によって変わる。すなわち関数 $F(t)$ の極値は

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t)-f''(t)(x-t)+f'(t) \\ &= f''(t)(t-x) \end{aligned}$$

から $t=x$，$t=\alpha$ のときであり α は $f''(\alpha)=0$ を満たす値である。このとき $F(t)=0$ は

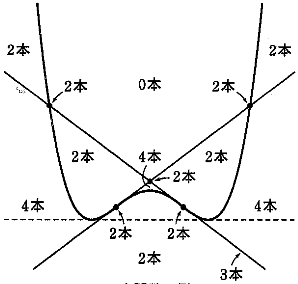
$t=x$ のとき $y=f(x)$ で関数のグラフ自身

$t=\alpha$ のとき $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

で変曲点における接線

である。これらを境界とする領域の点 $P(x, y)$ によって，曲線 $y=f(x)$ に引ける全接線での接点の個数が決まる。曲線 $y=f(x)$ 自身とその変曲点における接線を境界として区切られた領域内の点Pから曲線 $y=f(x)$ に引くことのできる全接線で接点の個数は，同じ領域内で同数である。引くことのできる接線の本数と接点の個数は同数であるが，$k+1$ 個の接点をもつ共通接線上では引ける接線数は接点数よりも k 個少ない。

尚，接線の本数は2つの曲線による図形についても，重ね合わせにより同じことが言える。2つの2次関数のグラフの図形では変曲点はないが共通接線が最大2本ある。また接線の本数は陰関数のときも言え，尖点においては両側の接線，有限区間では両端の接線それに漸近線も境界線になり得る。これらに関しての証明は省略する。



4次関数の例

§4．包絡線

a を変数とする曲線群 $\Gamma_a : F(x, y, a)=0$ の包絡線Eはhが小さいとき2曲線

$$F(x, y, a)=0, \ F(x, y, a+h)=0$$

の交点に近く，交点では

$$F(x, y, a+h)-F(x, y, a)=o(h)$$

であるから，包絡線Eは

$$\frac{\partial}{\partial a}F(x, y, a)=0, \ F(x, y, a)=0$$

から，aを消去したものとして得られる。

包絡線の一例を調べよう。定円周 $x^2+y^2=a^2$ 上に中心をもちy軸 $x=0$ に接するような円群

$$(x-a\cos\theta)^2+(y-a\sin\theta)^2=a^2\cos^2\theta$$

による包絡線を求める。

θで偏微分し $(y-a\sin\theta)\cos\theta=x\sin\theta$ となり，円群の式に代入しyを消去して $x(x-2a\cos^3\theta)=0$ となる。このことから次の包絡線を得る。

線分部分：$x=0, \ y=a\sin\theta$,

曲線部分：$x=2a\cos^3\theta, \ y=a(1+2\cos^2\theta)\sin\theta$

この包絡線の方程式は次のように変形できる。

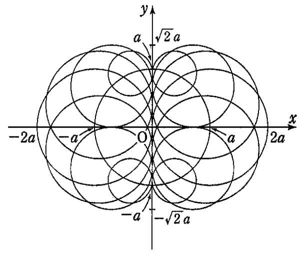
$$\begin{cases} x=0 \\ y=a\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}a\cos\theta+\dfrac{1}{2}a\cos3\theta \\ y=\dfrac{3}{2}a\sin\theta+\dfrac{1}{2}a\sin3\theta \end{cases}$$

曲線部分は円の周りを回りながら他の円の周りを回る半径 $3a/2$, $a/2$ の2つの円の複円運動を表している(No. 10拙稿「衛星が描く軌跡について」を参照)。

$$\frac{dx}{d\theta}=-3a\sin2\theta\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=3a\cos2\theta\cos\theta, \ \frac{dy}{dx}=-\cot2\theta$$

であり $x=0$ のとき曲線上の尖点となっている。また，この曲線はエピサイクロイドepicycloidの一種であり半径aの円の外側に半径$a/2$の円を転がしてできる曲線であることがわかる。これはその形から腎臓形nephroidと呼ばれる。



腎臓形

y軸の負の方向から来る平行光線群が，原点中心に半径$2a$の円周で反射された光線群

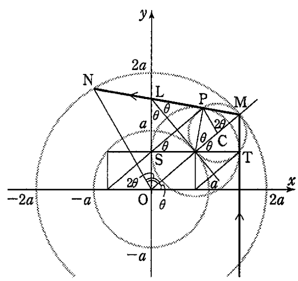
$$y-2a\sin\theta=-\cot2\theta(x-2a\cos\theta)$$

の包絡線，すなわち光線群を接線にもつ曲線(焦線)を同様に求めると，やはり同じ腎臓形となる。またこの曲線は

$$x=a\cos\theta+a\cos\theta\cos2\theta,$$

$$y=a\sin\theta+a\cos\theta\sin2\theta$$

とも変形ができy軸に接する円群上の位置が示され，円鏡による平行光線反射の図形的意味が理解できる。半径$2a$の円周上でx軸からのなす角がそれぞれθ, 3θの2点M, Nを結ぶ線分MNの集合による包絡線もこの腎臓形であることは図により計算するまでもない。



円鏡による反射光線

θを消去して得られる $4(x^2+y^2-a^2)^3=27a^4x^2$ は§2の(9)の曲線の式である。また，この曲線で囲まれる領域の面積と曲線の長さは，簡単な積分計算でそれぞれ $3\pi a^2$, $12a$ となる。

§5．解の個数の変化

関数 $F(t)$ は連続で微分可能な関数とする。このとき方程式 $F(t)=0$ の解の個数が変化するところ，重解をもつところでは $F(t)=0$，$F'(t)=0$ である。t をパラメータとした曲線群 $F(x,\ y,\ t)=0$ の場合は $F(x,\ y,\ t)=0$，$\dfrac{\partial}{\partial t}F(x,\ y,\ t)=0$ だから t の方程式 $F(x,\ y,\ t)=0$ の解の個数が変化するところは，x，y 平面上で曲線群 $F(x,\ y,\ t)=0$ の包絡線である。

例1　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から曲線 $y=f(x)$ に接線を引くとき，接点 $\mathrm{T}(t,\ f(t))$ の個数の変化するところは

接線：$y-f(t)=f'(t)(x-t)$，

その t における偏微分：$f''(t)(t-x)=0$

より曲線 $y=f(x)$ 自身と変曲点 $f''(t)=0$ における接線とであることがわかる。すなわち§3の結果が得られる。

例2　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から曲線 $y=f(x)$ に法線を引くとき，曲線との交点 $\mathrm{N}(t,\ f(t))$ の個数の変化するところは

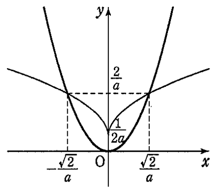
法線：$f'(t)(y-f(t))+x-t=0$，

偏微分：$f''(t)(y-f(t))=f'(t)^2+1$

から t を消去して得られる。また $\mathrm{PN}^2=(t-x)^2+(f(t)-y)^2$ を t で偏微分すると法線の式になるから，PN が定点 P から曲線 $y=f(x)$ までの距離の極値を与えることがわかる。

例3　放物線 $f(x)=ax^2$ に共通法線はなく，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から放物線に引ける法線の本数によって分けられる領域の境界を求めると

$(ax)^2=2\left(\dfrac{2ay-1}{3}\right)^3$ が得られる。これは曲線 $y=ax^2$ の法線群による包絡線であり縮閉線といい，曲率中心の軌跡である。尚，腎臓形の縮閉線は $90°$ 回転した半分の大きさの腎臓形である。



$y=ax^2$ の縮閉線

注（§2）　円の接線は§1の方程式

$f_x(x_1,\ y_1)(x-x_1)+f_y(x_1,\ y_1)(y-y_1)=0$

によれば $x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$ となる。

この形式が実際には一般的で，たとえば

曲線 $ax^m+by^n=c$ の接線は

$max_1{}^{m-1}(x-x_1)+nby_1{}^{n-1}(y-y_1)=0$

曲線 $x^my^n=a$ の接線は

$my_1(x-x_1)+nx_1(y-y_1)=0$

のように表される。

（東京都立小平高等学校）