等分方程式と正 n 角形の画き方

たつやま　いちろう
龍山　一郎

§0．はじめに

定規とコンパスによって作図ができる正 n 角形については，数研通信 36 号で述べたが，今回は前と異なる画き方で試みた。また，定規とコンパスのみでは画くことができない正多角形のうち正 7 角形，正 9 角形，正 13 角形については「折り紙による折り方」を利用し，それ以外の正 11 角形，正 19 角形については近似画法で画くことによって，正 3 角形から正 20 角形までを，等分方程式との関連を含めて述べた。更に，任意の角の 3 等分と任意の数の 3 乗根については，「折り紙による折り方」により，述べたいと思います。

§1．定規とコンパスによる(I)

(1)　**正 3 角形・正 6 角形・正 12 角形**

3 等分方程式

$x^3-3x-2=0 \quad (x-2)\{x+1\}^2=0$

6 等分方程式

$x^6-6x^4+9x^2-4=0$

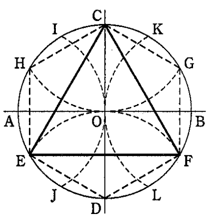
$(x-2)(x+2)\{(x+1)(x-1)\}^2=0$

12 等分方程式

$x^{12}-12x^{10}+54x^8-112x^6+105x^4-36x^2=0$

$(x-2)(x+2)\{(x+1)(x-1)x(x^2-3)\}^2=0$

〔画き方〕



円Oを中心とし，直交する直径を AB，CD とする。

(i)　点Dを中心として，半径 DO の円を画き，円Oとの交点を E，F とする。3 点 C，E，F を結ぶと正 3 角形となる。

(ii)　次に点Cを中心として，半径 CO の円を画き，円Oとの交点を G，H とし，6 点 C，H，E，D，F，G を結ぶと正 6 角形になる。

(iii)　同様にして，点 A，B を中心として，半径 AO，BO の円を画き，円Oとの交点を結ぶと正 12 角形となる。

(2)　**正 4 角形（正方形）・正 8 角形・正 16 角形**

4 等分方程式

$x^4-4x^2=0 \quad (x-2)(x+2)\{x\}^2=0$

8 等分方程式

$x^8-8x^6+20x^4-16x^2=0$

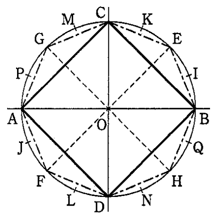
$(x-2)(x+2)\{x(x^2-2)\}^2=0$

16 等分方程式

$(x^2-4)(x^7-6x^5+10x^3-4x)^2=0$

$(x-2)(x+2)\{x(x^2-2)(x^4-4x^2+2)\}^2=0$

〔画き方〕



円Oを中心とし，直交する直径を AB，CD とする。

(i)　4 点 A，B，C，D を結ぶと正方形になる。

(ii)　次に点Oを通り，AC に平行な直線の円Oとの交点を E，F，AD に平行な直線の円Oとの交点を G，H とし，8 点 A，F，D，H，B，E，C，G を結ぶと正 8 角形となる。

(iii)　同様にして，点Oを通り，AE∥IJ，BG∥PQ，CH∥MN，DE∥KL となる点 I，J，P，Q，M，N，K，L を円周上にとり，それぞれの点を結ぶと正 16 角形となる。

(3)　**正 5 角形・正 10 角形・正 20 角形**

5 等分方程式

$x^5-5x^3+5x-2=0 \quad (x-2)\{x^2+x-1\}^2=0$

10 等分方程式

$x^{10}-10x^8+35x^6-50x^4+25x^2-4=0$

$(x-2)(x+2)\{(x^2+x-1)(x^2-x-1)\}^2=0$

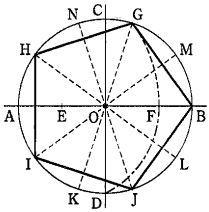
20等分方程式

$(x^2-4)(x^9-8x^7+21x^5-20x^3+5x)^2=0$

$(x-2)(x+2)$

$\times\{x(x^2+x-1)(x^2-x-1)(x^4-5x^2+5)\}^2=0$

〔画き方〕



円Oを中心とし，直交する直径を AB, CD とする。

(i) AO の中点をEとし，ED＝EF となる点Fを AB 上にとり，AF＝AG となる点Gを円周上にとると，辺 BG が正5角形の1辺である。

(ii) 次に点GとOを結び，線分 GO を延長して，円周との交点をK，同じように線分 HO, IO, JO を延長して円周との交点をL，M，Nとし，それぞれの点(Aを含み，C，Dは含まない)を結ぶと正10角形である。

(iii) 辺 GC を1辺として円周上をきり，それぞれの点を結ぶと正20角形である。

§2．折り紙による折り方(I)

(4) 正7角形・正14角形

7等分方程式

$x^7-7x^5+14x^3-7x-2=0$

$(x-2)\{x^3+x^2-2x-1\}^2=0$

$x^3+x^2-2x-1=0$ の解の1つは

$$x=\frac{1}{3}(2\sqrt{7}\cos\theta-1)\quad\left(=2\cos\frac{360^\circ}{7}\right)$$

ただし $\cos 3\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

他の解は $x=\dfrac{1}{3}\{2\sqrt{7}\cos(120^\circ+\theta)-1\}$,

$\dfrac{1}{3}\{2\sqrt{7}\cos(120^\circ-\theta)-1\}$

14等分方程式

$(x^2-4)(x^6-5x^4+6x^2-1)^2=0$

$(x-2)(x+2)$

$\times\{(x^3+x^2-2x-1)(x^3-x^2-2x+1)\}^2=0$

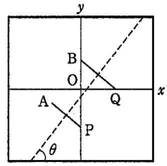
〔折り方〕

$A\left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $B(0,\ 1)$, $P(0,\ p)$, $Q(q,\ 0)$

にとり，Aとy軸上の点Pと，Bとx軸上の点Qが重なるように折り，その折れ線を

$y=ax+b$

とする。



2点A，Pは

$y=-\dfrac{1}{a}x+e_1$ 上にあるから

$-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{a}+e_1$ …①

$p=e_1$ ……②

より $p=-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}$

AP の中点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2a}\right)$

同様にB，Qは

$y=-\dfrac{1}{a}x+e_2$ 上にあるから $1=e_2$ ……③

$0=-\dfrac{q}{a}+e_2$ ……④

より $q=a$

BQ の中点 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

この2つの中点は $y=ax+b$ 上にあるから

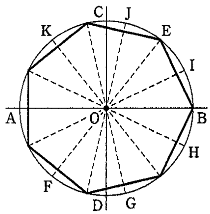
$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2a}=a\left(-\dfrac{1}{2}\right)+b$ ……⑤

$1=a^2+2b$ ……⑥

⑥－⑤×2 $2+\dfrac{1}{a}=a^2+a$

$\therefore\ a^3+a^2-2a-1=0$

〔画き方〕



円Oを中心とし，直交する直径を AB, CD とする。

(i) 上の式を $a=x$ とおくと $x^3+x^2-2x-1=0$ となる。直線 $y=ax+b$ の傾き a の x 軸とのなす角が $\dfrac{360^\circ}{7}$ であるから，円O上に $\angle BOE=\dfrac{360^\circ}{7}$ となる点Eをとり，辺 BE を1辺として円周上をきり，それぞれの点を結べば正7角形ができる。

(ii) 同じような方法で，線分 EO を延長して，円Oとの交点をFとし，同様にして，点G，H，I，J，Kをとり，それぞれの点(Aを含む)を結べば正14角形ができる。

(5) **正 9 角形・正 18 角形**

9 等分方程式

$x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x-2=0$

$(x-2)\{(x+1)(x^3-3x+1)\}^2=0$

$x^3-3x+1=0$ の解の 1 つは $2\cos 40°$ である。

18 等分方程式

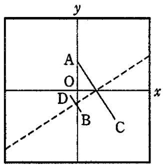
$(x^2-4)(x^8-7x^6+15x^4-10x^2+1)^2=0$

$(x-2)(x+2)$

$\times\{(x^2-1)(x^3-3x+1)(x^3-3x-1)\}^2=0$

$x^3-3x-1=0$ の解の 1 つは $2\cos 20°$ である。

〔折り方〕



$A(0,\ 1)$,

$B\left(\frac{1}{8},\ -\frac{3}{4}\right)$,

$C(c,\ -1)$,

$D\left(-\frac{1}{8},\ d\right)$

にとり，A と $y=-1$

上の点C，B と $x=-\frac{1}{8}$ 上の点Dが重なるように

折り，その折れ線を $y=ax+b$ とする。

2 点 A，C は

$y=-\frac{1}{a}x+e_1$ 上にあるから $1=e_1$ ……①

$-1=-\frac{1}{a}c+e_1$ ……②

より $c=2a$

AC の中点 $(a,\ 0)$

同様に B，D は

$y=-\frac{1}{a}x+e_2$ 上にあるから

$-\frac{3}{4}=-\frac{1}{a}\times\frac{1}{8}+e_2$ ……③

$d=-\frac{1}{a}\times\left(-\frac{1}{8}\right)+e_2$ ……④

より $d=\frac{1}{4a}-\frac{3}{4}$

BD の中点 $\left(0,\ \frac{1}{8a}-\frac{3}{4}\right)$

この 2 つの中点は $y=ax+b$ 上にあるから

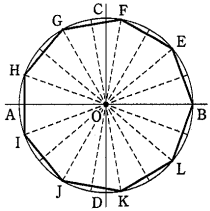
$0=a^2+b$ ……⑤

$\frac{1}{8a}-\frac{3}{4}=a\times 0+b$ ……⑥

⑤−⑥ $a^2=-\frac{1}{8a}+\frac{3}{4}$

$\therefore\ 8a^3-6a+1=0$

〔画き方〕



円Oを中心とし，直交する直径を AB，CD とする。

(i) 上の式を $2a=x$ とおくと $x^3-3x+1=0$ となる。直線 $y=ax+b$ の傾き a の x 軸とのなす角が $40°$ であるから，円O上に $\angle BOE=40°$ となる点Eをとり，辺 BE を 1 辺として円周上をきり，それぞれの点を結べば正 9 角形ができる。

(ii) また，$\angle IOA=20°$ より AI を 1 辺として，円周上をきり，それぞれの点を結べば，正 18 角形ができる。

(6) **正 13 角形**

13 等分方程式

$(x-2)(x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1)^2=0$

$(x-2)\{2x^3+(\sqrt{13}+1)x^2-2x-(\sqrt{13}+3)\}^2$

$\times\{2x^3-(\sqrt{13}-1)x^2-2x+(\sqrt{13}-3)\}^2=0$

$2x^3-(\sqrt{13}-1)x^2-2x+(\sqrt{13}-3)=0$

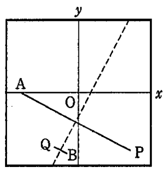
の解の 1 つは

$x=\frac{1}{6}(2\sqrt{26-2\sqrt{13}}\cos\theta+\sqrt{13}-1)$

$\left(=2\cos\frac{360°}{13}\right)$

ただし $\cos 3\theta=\frac{\sqrt{2}(26-5\sqrt{13})}{\sqrt{(13-\sqrt{13})^3}}$

〔折り方〕



$A(-2,\ 0)$,

$B(\sqrt{13}-4,\ -2)$,

$P(p,\ -2)$，$Q(-1,\ q)$

にとり，点Aと点Pと，点Bと点Qが重なるように折り，その折れ線を $y=ax+b$ とする。

2 点 A，P は

$y=-\frac{1}{a}x+e_1$ 上にあるから

$-2=-\frac{p}{a}+e_1$ ……①

$0=\frac{2}{a}+e_1$ ……②

より $p=2a-2$

同様にして，2 点 B，Q は

$y=-\frac{1}{a}x+e_2$ 上にあるから

$-2=\frac{-\sqrt{13}+4}{a}+e_2$ ……③

$q=\frac{1}{a}+e_2$ ……④　より　$q=\frac{\sqrt{13}-3}{a}-2$

次に，APの中点$(a-2,\ -1)$，

BQの中点$\left(\frac{\sqrt{13}-5}{2},\ \frac{\sqrt{13}-3}{2a}-2\right)$

は，直線 $y=ax+b$ 上にあるから

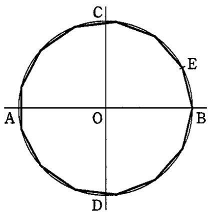
$-1=a(a-2)+b$ ……⑤

$\frac{\sqrt{13}-3}{2a}-2=a\left(\frac{\sqrt{13}-5}{2}\right)+b$ ……⑥

⑥−⑤　$\frac{\sqrt{13}-3}{2a}-1=\frac{\sqrt{13}-5}{2}a-a^2+2a$

$\therefore\ 2a^3-(\sqrt{13}-1)a^2-2a+(\sqrt{13}-3)=0$

〔画き方〕



円Oを中心とし，直交する直径をAB, CDとして，上の式を $a=x$ とおくと $2x^3-(\sqrt{13}-1)x^2-2x+(\sqrt{13}-3)=0$ となり，直線 $y=ax+b$ の傾き a の x 軸とのなす角が $\frac{360°}{13}$ であるから，円O上に $\angle BOE=\frac{360°}{13}$ となる点Eをとり，辺BEを一辺とし，円周上をきり，それぞれの点を結べば正13角形ができる。

§3．定規とコンパスによる(II)

(7) 正15角形

15等分方程式

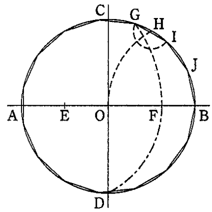
$$(x-2)(x^7+x^6-6x^5-5x^4+10x^3+6x^2-4x-1)^2=0$$

$$(x-2)\left\{(x+1)(x^2+x-1)\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^2=0$$

〔画き方〕

円Oを中心とし，直交する直径をAB, CDとする。

AOの中点をEとし，ED=EF となる点FをAB上にとり，AF=AG となる点Gを円O上にとる。



次に点Bを中心として，半径BOの円O上に点Hをとり，点Hを中心として，半径HGの円Oとの交点をIとする。

そして，弧BIの中点をJとすると，辺BJが正15角形の1辺である。

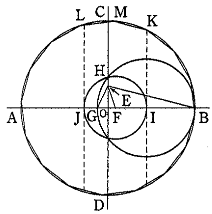
(8) 正17角形

17等分方程式

$$(x-2)(x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1)^2=0$$

$$(x-2)\{4x^2-(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})x-(\sqrt{17}+1-\sqrt{34+2\sqrt{17}})\}^2$$
$$\times\{4x^2-(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}})x-(\sqrt{17}+1+\sqrt{34+2\sqrt{17}})\}^2$$
$$\times\{4x^2+(\sqrt{17}+1-\sqrt{34+2\sqrt{17}})x+(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}})\}^2$$
$$\times\{4x^2+(\sqrt{17}+1+\sqrt{34+2\sqrt{17}})x+(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}})\}^2=0$$

〔画き方〕



円Oを中心とし，直交する直径をAB, CDとする。

$OE=\frac{1}{4}OC$，

$\angle OEF=\frac{1}{4}\angle OEB$

$\angle FEG=45°$ を満たす点E，F，GをOC，OB，OA上にとる。

次に直径BGとする円がOCと交わる点をH，Fを中心として半径FHの円がOB，OAとの交点をI，Jとし，AB⊥IK，AB⊥JL となるような点K，Lを円周上にとり，弧KLの中点をMとすると，辺KMが正17角形の1辺である。

§4．定規とコンパス（近似画法）による

(9) 正11角形

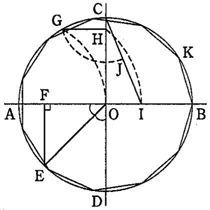
11等分方程式

$$x^{11}-11x^9+44x^7-77x^5+55x^3-11x-2=0$$

$$(x-2)(x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1)^2=0$$

〔画き方〕

円Oを中心とし，直交する直径をAB，CDとする。



$\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOD$ となる点Eを円O上にとり，OA⊥EF となる点FをOA上にとる。次に AO=AG となる点Gを円O上にとる。

そしてGH⊥COとなる点HをCO上にとり，FH=FI となるようにOB上にIをとり，CとIを結び，さらにCJ=CGとなる点JをCI上にとり，IJ=BK となるように点Kを円周上にとると，辺BKが正11角形の1辺である。

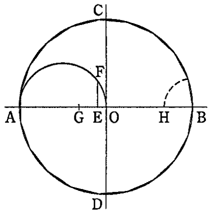
(誤差) 正11角形の中心角32°43′38″ より　8″(大)

(10) 正19角形

$$(x-2)(x^9+x^8-8x^7-7x^6+21x^5+15x^4-20x^3-10x^2+5x+1)^2=0$$

〔画き方〕

円Oを中心とし，直交する直径をAB，CDとする。



OAを直径とする半円を画き，

$OE=\frac{1}{10}OA$,

EF⊥OA となる点E，Fをとり，OG=OF となる点GをOA上にとる。

そして，$BH=\frac{1}{4}BG$ となる点Hをとると，この辺BHが正19角形の1辺である。

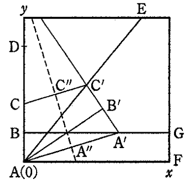
(誤差) 正19角形の中心角18°56′51″ より 27.5″(小)

この正19角形は「折り紙で折る」ことができるので，$(x-2)\{(3\text{次式})(3\text{次式})(3\text{次式})\}^2=0$ に因数分解できるはずであるが，具体的に代数式で表すことができなかったので，近似画法にした。

§5．折り紙による折り方(II)

任意の角の3等分

〔折り方〕



右図のようにA(0, 0), B(0, 1), C(0, 2), D(0, 4) $\angle EAF=3\theta$, AF∥BG とおく。そして，点Aと線分BG上の点A′，点Cと線分AE上の点C′が重なるように折り，折れ線を $y=-\frac{1}{a}x+b$ とする。次に，線分A′C′の中点をB′とすると，$\angle C'AB'=\angle B'AA'=\angle A'AF=\theta$ となる。

〔証明〕

線分AC′を $y=mx\ (m=\tan 3\theta)$ とおく。

線分AA′，CC′はいずれも $y=-\frac{1}{a}x+b$ に垂直であるから，AA′：$y=ax$，CC′：$y=ax+2$ となる。

次に，点A′の座標は $\left(\frac{1}{a},\ 1\right)$ となり，AA′の中点の座標は $A''\left(\frac{1}{2a},\ \frac{1}{2}\right)$，点C′は $y=ax+2$ と $y=mx$ との交点であるから $C'\left(\frac{2}{m-a},\ \frac{2m}{m-a}\right)$，

CC′の中点の座標は $C''\left(\frac{1}{m-a},\ \frac{m}{m-a}+1\right)$

ここで，2点A″，C″は $y=-\frac{1}{a}x+b$ 上にあるから

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{a}\times\frac{1}{2a}+b\ \cdots\cdots ①$$

$$\frac{m}{m-a}+1=-\frac{1}{a}\times\frac{1}{m-a}+b\ \cdots\cdots ②$$

②−①から　$\frac{m}{m-a}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{a(m-a)}+\frac{1}{2a^2}$

$$m=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}\ \cdots\cdots ③$$

次に，A′C′の中点をB′とすると，

$B'\left(\frac{m+a}{2a(m-a)},\ \frac{3m-a}{2(m-a)}\right)$

より，AB′の傾き m' は，$m'=\frac{a(3m-a)}{m+a}$

③から　$=\frac{2a}{1-a^2}\ \cdots\cdots ④$

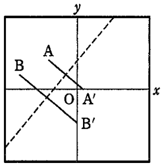
ここで，$a=\tan\theta$ ($\angle A'AF=\theta$) とおくと

$$\tan 2\theta=\frac{2a}{1-a^2},\ \tan 3\theta=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}$$ となる。

ゆえに，$\angle C'AF=3\theta$ のとき $\angle B'AF=2\theta$ $\angle A'AF=\theta$ となり，任意の角が3等分される。

任意の数の3乗根

〔折り方〕



右図のように，$A(-2,\ 2)$, $B(-4,\ 1)$ をとり，点Aは x 軸上の点 $A'(c,\ 0)$ と，点Bは y 軸上の点 $B'(0,\ d)$ と重なるように折り，折れ線を $y=ax+b$ とすると $a=\sqrt[3]{2}$ の値を求めることができる。

〔証明〕

AA' の傾き $\dfrac{-2}{c+2}=-\dfrac{1}{a}$ から $c=2a-2$

AA' の中点 A'' の座標は

$$A''(a-2,\ 1)$$

BB' の傾き $\dfrac{d-1}{0+4}=-\dfrac{1}{a}$ から $d=-\dfrac{4}{a}+1$

BB' の中点 B'' の座標は

$$B''\left(-2,\ -\frac{2}{a}+1\right)$$

この2点 A'', B'' は $y=ax+b$ 上にあるから

$$1=a(a-2)+b \quad \cdots\cdots ①$$

$$-\frac{2}{a}+1=-2a+b \quad \cdots\cdots ②$$

①−②から $\dfrac{2}{a}=a^2 \quad a^3=2 \qquad \therefore\ a=\sqrt[3]{2}$

ここで，直線 $y=\sqrt[3]{2}\,x+b$ に，2点 $P(0,\ y_1)$, $Q(-1,\ y_2)$ を代入すると，$y_1-y_2=\sqrt[3]{2}$ となり，1辺の長さが1 cmの立方体の体積 $V_1=1\mathrm{cm}^3$ に対し，その体積の2倍の立方体の体積 $V_2=2\mathrm{cm}^3$ (1辺の長さ $\sqrt[3]{2}$ cm) を求めることができる。

最後に，$A(-n,\ 2)$, $B(-2n,\ 1)$, $A'(c,\ 0)$, $B'(0,\ d)$ とおくと，前と同様にして，

$A''(a-n,\ 1)$, $B''\left(-n,\ -\dfrac{n}{a}+1\right)$ から

$$1=a(a-n)+b \quad \cdots\cdots ①'$$

$$-\frac{n}{a}+1=a(-n)+b \quad \cdots\cdots ②'$$

①′−②′から $\dfrac{n}{a}=a^2 \quad a^3=n \qquad \therefore\ a=\sqrt[3]{n}$

ゆえに，任意の数の3乗根を求めることができる。

§6．おわりに

等分方程式が，2次式(複2次式を含む)以下の積に因数分解ができるものは，定規とコンパスで正 n 角形を画くことができ，3次式以下の積に変形できるものは，「折り紙による折り方」を含めて画くことができるが，正11角形は等分方程式が5次式になっているから，定規とコンパスで画くこともできないし，「折り紙で折る」こともできないが，この正19角形以上で「折り紙で折る」ことができるのは，正37角形があるといわれております。

また，正 m 角形と正 n 角形から，同じ円内に正 mn 角形を画く方法として，式 $\dfrac{n\theta}{m}a+\dfrac{\theta}{m}b=\theta$ とおく(ただし $m>n\geqq 3$, $m=na+b$, $n\theta=360^\circ$, $a>0$, b 整数)。

(例) 正7角形と正5角形から，正35角形を画く

$m=7$, $n=5$, $a=1$ から $b=2$, $\theta=72^\circ$

$$\frac{360^\circ}{7}\times 1+\frac{72^\circ}{7}\times 2=\frac{360^\circ}{5}$$ より

$$\frac{360^\circ}{5}-\frac{360^\circ}{7}=\frac{360^\circ}{35}\times 2$$

正35角形の中心角は，正5角形と正7角形の最初の頂点の中心角の差を2等分したものである。

$n=2$ のとき，円周上の点 ($\theta=180^\circ$) と考えられ，b の数値は ± 1, ± 2 が適当であると思われる。

《参考文献》

1) 折り紙の数学　深川英俊訳　森北出版
2) 平面幾何画法集成　培風館

(元大分県立国東高等学校)