連分数展開における無理数の循環性について

川尻　輝雄（かわじり　てるお）

§1．はじめに

ここでは論理を簡単にするため，文字はすべて正数を扱うことにする。まず有理数について，例えば

$$\frac{235}{36}=6+\frac{19}{36},\ \frac{36}{19}=1+\frac{17}{19},\ \frac{19}{17}=1+\frac{2}{17},$$

$$\frac{17}{2}=8+\frac{1}{2}\ \text{から}$$

$$\frac{235}{36}=6+\frac{19}{36}=6+\cfrac{1}{1+\cfrac{17}{19}}=6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{17}}}$$

$$=6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2}}}}$$

のように，数を整数部分と1より小さい分数の和で表し，その分数の逆数は1より大きくなるので，さらに整数と1より小さい分数の和で表し，…というように続けていくと，次々と現れる分数の分子はやがて1に到達する。

一般に，ある有理数 $\frac{n}{m}$ に対して，$\frac{n}{m}=q_0+\frac{a_2}{a_1}$，$\frac{a_1}{a_2}=q_1+\frac{a_3}{a_2}$，$\frac{a_2}{a_3}=q_2+\frac{a_4}{a_3}$，…とすると $a_1>a_2>a_3>\cdots$ から a_k はいつかは1に到達する。したがって，有理数をこのような連分数展開をすると，必ず有限回で止まる。逆に，有限回で終っている数は当然有理数である。

連分数の一般的な形は $q_0+\cfrac{p_1}{q_1+\cfrac{p_2}{q_2+\cfrac{p_3}{q_3+\ddots}}}$ であるが，ここでは

$p_1=p_2=\cdots=1$（正則）とする。

§2．無理数の連分数展開

無理数を連分数展開すれば上の結果から，無限に続くことになり，

$\alpha=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots}}$ を q_0，$\underline{q_1q_2q_3\cdots}$ で表し，α を k 番目の商で切ってしまったときの近似分数

$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots+\cfrac{1}{q_k}}}$ を $\frac{A_k}{B_k}$（A_k，B_k は自然数，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）とすると

$$\frac{A_0}{B_0}=\frac{q_0}{1},\ \frac{A_1}{B_1}=q_0+\frac{1}{q_1}=\frac{q_0q_1+1}{q_1},$$

$$\frac{A_2}{B_2}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}}$$

$$=q_0+\frac{q_2}{q_1q_2+1}=\frac{q_0q_1q_2+q_2+q_0}{q_1q_2+1}=\frac{q_2A_1+A_0}{q_2B_1+B_0}$$

$$\frac{A_3}{B_3}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}}}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{q_3}{q_2q_3+1}}$$

$$=q_0+\frac{q_2q_3+1}{q_1q_2q_3+q_3+q_1}$$

$$=\frac{q_0q_1q_2q_3+q_0q_3+q_0q_1+q_2q_3+1}{q_1q_2q_3+q_3+q_1}=\frac{q_3A_2+A_1}{q_3B_2+B_1}$$

さらにこの式の q_3 に $q_3+\frac{1}{q_4}$ を代入すれば

$$\frac{A_4}{B_4}=\frac{\left(q_3+\frac{1}{q_4}\right)A_2+A_1}{\left(q_3+\frac{1}{q_4}\right)B_2+B_1}=\frac{q_4(q_3A_2+A_1)+A_2}{q_4(q_3B_2+B_1)+B_2}$$

$$=\frac{q_4A_3+A_2}{q_4B_3+B_2}$$

となり，全ての $k\geqq 2$ の自然数について数学的帰納法により $\begin{cases}A_k=q_kA_{k-1}+A_{k-2}\\ B_k=q_kB_{k-1}+B_{k-2}\end{cases}$ が成り立つ。

ここで

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}=1.\underline{222\cdots}$$

より $\sqrt{2}$ の近似分数をいくつか書いてみると，
$q_0=1$，$q_1=q_2=\cdots=2$ であるから

$\frac{A_0}{B_0}=\frac{1}{1}$，$\frac{A_1}{B_1}=\frac{3}{2}$，$\frac{A_2}{B_2}=\frac{2\times3+1}{2\times2+1}=\frac{7}{5}$，

$\frac{A_3}{B_3}=\frac{2\times7+3}{2\times5+2}=\frac{17}{12}$，$\frac{A_4}{B_4}=\frac{2\times17+7}{2\times12+5}=\frac{41}{29}$，

$\frac{A_5}{B_5}=\frac{2\times41+17}{2\times29+12}=\frac{99}{70}$，$\frac{A_6}{B_6}=\frac{2\times99+41}{2\times70+29}=\frac{239}{169}$，

…となる。

§3．いろいろな無理数の連分数展開

$\sqrt{2}$の小数点以下の部分を α とおくと，

$\alpha=\sqrt{2}-1$ であるが，$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ から

$$\alpha=\frac{1}{2+\alpha}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\alpha}}=0.\underline{222\cdots}$$ で，

$$\sqrt{2}=1.\underline{222\cdots}$$

と循環することがわかる。

同様にして $\sqrt{3}$ の場合 $\beta=\sqrt{3}-1$ とおくと
$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=2$ から

$$\beta=\frac{2}{2+\beta}=\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\beta}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\beta}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\beta}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\beta}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\beta}}}}=0.\underline{1212\cdots}$$

$$\therefore\quad \sqrt{3}=1.\underline{1212\cdots}$$

$\sqrt{5}$ の場合 $\gamma=\sqrt{5}-2$ とおくと
$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=1$ から

$$\gamma=\frac{1}{4+\gamma}=0.\underline{444\cdots}\qquad\therefore\quad\sqrt{5}=2.\underline{444\cdots}$$

というように $\alpha=\sqrt{a}$ の形の無理数は，小数点以下が循環するように見える。

ただ $\sqrt{7}$ のような場合，この循環節はかなり長くなり $\alpha=\sqrt{7}-2$ とおくと $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)=3$ から

$$\alpha=\frac{3}{4+\alpha}=\cfrac{1}{\cfrac{4+\alpha}{3}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1+\alpha}{3}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{1+\alpha}}}$$

ここで $\alpha^2+4\alpha=3$ であるから
$(\alpha+1)(\alpha+3)=6$

$\therefore\quad \frac{3}{1+\alpha}=\frac{\alpha+3}{2}$ とおいて

$$\alpha=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\alpha+3}{2}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\alpha+1}{2}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\alpha+1}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\alpha+3}{3}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\alpha}{3}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{\alpha}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\alpha}}}}=0.\underline{11141114\cdots}$$

となる。この α の変形の中で分数式の分母に現れる小数部分の分数式をとり出して書いてみると

$$\alpha\xrightarrow{1}\frac{1+\alpha}{3}\xrightarrow{1}\frac{1+\alpha}{2}\xrightarrow{1}\frac{\alpha}{3}\xrightarrow{4}\alpha$$

となって元の α にもどり，繰り返しが起こることがわかる。ただし，→の上の数は，その都度出てくる整数を表す。ここに利用されている等式は
$\alpha^2+4\alpha=3$ と $(\alpha+1)(\alpha+3)=6$ だけである。
同様にして $\sqrt{13}$ についても $\beta=\sqrt{13}-3$ とおくと $\beta+3=\sqrt{13}$ から $\beta^2+6\beta=4$ これより

$$(\beta+1)(\beta+5)=9,\ (\beta+2)(\beta+4)=12$$

であるから

$$\beta\xrightarrow{1}\frac{\beta+2}{4}\xrightarrow{1}\frac{\beta+1}{3}\xrightarrow{1}\frac{\beta+2}{3}\xrightarrow{1}\frac{\beta}{4}$$

$\xrightarrow{6}\beta$ となって繰り返し，$\sqrt{13}=3.\underline{11116\cdots}$ となる。

§4. $\sqrt{a}$ の連分数展開

さらに一般的に考えて $[\sqrt{a}]=m$, ([　]はガウス記号)とし,

$\alpha+m=\sqrt{a}$ から, $\alpha(\alpha+2m)=a-m^2=p$ とおくと,

$$\alpha=\frac{p}{\alpha+2m} \text{ について}$$

$$\alpha=\cfrac{1}{\cfrac{\alpha+2m}{p}}=\cfrac{1}{k_1+\cfrac{\alpha+2m-pk_1}{p}}=\cfrac{1}{k_1+\cfrac{\alpha+n}{p}}$$

とし, $\dfrac{p}{\alpha+n}=k_2+\dfrac{\alpha+q}{l}\ (n+pk_1=2m)$

とおく。ここで

$$\frac{\alpha+n}{p}<1 \text{ から } p>\alpha+n>n \quad \cdots①$$

$$\frac{\alpha+q}{l}<1 \text{ から } l>\alpha+q>q \quad \cdots②$$

$$\alpha^2+(k_2l+q+n)\alpha+(k_2l+q)n-pl=0 \quad \cdots③$$

$$\alpha^2+2m\alpha-p=0 \quad \cdots④$$

③と④は α について同じ方程式であるから，係数を比較して

$$\begin{cases} k_2l+q+n=2m \\ (k_2l+q)n-pl=-p \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k_2l+q=2m-n=pk_1 \quad \cdots⑤ \\ pk_1n-pl=-p \end{cases}$$

これより　$l=k_1n+1$ …⑥

さらに $\dfrac{l}{\alpha+q}=k'+\dfrac{\alpha+q'}{l'}$ とおくと

$l'>\alpha+q'>q'$ …⑦ で

$$\alpha^2+(k'l'+q'+q)\alpha+q(k'l'+q')-ll'=0 \quad \cdots⑧$$

③と⑧が一致することから

$$k'l'+q'+q=k_2l+q+n$$

$$\therefore\ k'l'+q'=k_2l+n \quad \cdots⑨$$

$q(k'l'+q')-ll'=(k_2l+q)n-pl$　これより

$q(k_2l+n)-ll'=(k_2l+q)n-pl$

$qk_2l-ll'=k_2ln-pl$　両辺を l で割って

$qk_2-l'=k_2n-p$

$\therefore\ l'=k_2(q-n)+p$ …⑩

③，⑧の α の係数が $2m$ に等しいことから l, l' は共に $2m$ 以下であり，⑥，⑩より共に整数であることがわかる。

このようにして，分数式の分母に現れる $\dfrac{\alpha+q}{l}$ の形の分数式では異なるものは限られており，しかも最後に α にもどるときは，

$\dfrac{\alpha}{p} \xrightarrow{2m} \alpha$ となっているから

$$\sqrt{a}=m.\underline{k_1k_2\cdots2mk_1k_2}\cdots$$

の形の循環節を持つことがわかる。

§5. $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ の連分数展開

さらに拡張して $\dfrac{\sqrt{a}}{b}\ (b\geqq2)$ の形の無理数はどうだろうか。

例えば $\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ とおくと, $\beta=\dfrac{2}{9\beta}$, $9\beta^2=2$ から

$$(9\beta-4)(9\beta+4)=2$$

したがって

$$\beta=\frac{2}{9\beta}=\cfrac{1}{\cfrac{9\beta}{2}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{9\beta-4}{2}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{2}{9\beta-4}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9\beta+4}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+9\beta-4}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{\cfrac{1}{9\beta-4}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{\cfrac{9\beta+4}{2}}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\beta}}}}=0.\underline{284848\cdots}$$

$\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ とおくと $\gamma=\dfrac{1}{8\gamma}$, $8\gamma^2=1$ から

$$(8\gamma-2)(8\gamma+2)=4$$

$$\gamma=\frac{1}{8\gamma}=\frac{1}{2+(8\gamma-2)}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{8\gamma-2}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{8\gamma+2}{4}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{8\gamma-2}{4}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{4}{8\gamma-2}}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8\gamma+2}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\gamma}}}}=0.\underline{214141\cdots}$$

となり，小数点以下すぐには循環しない混循環小数

の形をとる。さらに $\delta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ のような場合，

$4\delta-1=\sqrt{3}$ から

$8\delta^2-4\delta=1$ や $(8\delta-5)(8\delta+1)=3$ を用いて

$$\delta=\frac{1}{\frac{1}{\delta}}=\frac{1}{8\delta-4}=\frac{1}{1+8\delta-5}=\frac{1}{1+\frac{3}{8\delta+1}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8\delta+1}{3}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{8\delta-5}{3}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{8\delta+1}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{6+8\delta-5}}}$$

$$=0.\underline{12626\cdots}$$

と循環する。

一般に $\alpha=\dfrac{\sqrt{a}-q}{m}$ の形の無理数は，$m\alpha+q=\sqrt{a}$

$m^2\alpha^2+2mq\alpha+q^2=a$ から $\alpha(m^2\alpha+2mq)=a-q^2$ と $(m\alpha+kq)(m\alpha+(2-k)q)=a-(k-1)^2q^2$ の関係を用いて循環することになる。

最後に関係式 $\alpha=\dfrac{c}{a\alpha+b}$ の解は

$\alpha=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ で上の形の無理数に含まれるので循環することになり，逆に任意の循環する無理数 α は，どのような循環節をもつ場合でも，この形の無理数で表されることがわかる。

例えば $\alpha=p_0.\underline{p_1p_2p_3p_1p_2\cdots}$ とすると

$$\alpha-p_0=\frac{1}{p_1+\frac{1}{p_2+\frac{1}{p_3+\alpha-p_0}}}$$

$$=\frac{1}{p_1+\frac{p_3+\alpha-p_0}{p_2(p_3+\alpha-p_0)+1}}$$

$$=\frac{p_2(p_3+\alpha-p_0)+1}{p_1(p_2(p_3+\alpha-p_0)+1)+p_3+\alpha-p_0}$$

から分数式の分母，分子は常に $\alpha-p_0$ の一次式で表され，これを簡単に

$\alpha-p_0=\dfrac{C(\alpha-p_0)+D}{A(\alpha-p_0)+B}$ と表せば，

$$A(\alpha-p_0)^2+(B-C)(\alpha-p_0)-D=0$$

よって $\alpha-p_0=\dfrac{C-B\pm\sqrt{(B-C)^2+4AD}}{2A}$

このことから α は既存の形の無理数となる。

§6．あとがき

ここでは，整数を係数とする2次方程式 $a\alpha^2+b\alpha=c$ の解で表される無理数 α が連分数展開において，循環節をもつことが示されたが，関係式 $\alpha=\dfrac{c}{a\alpha+b}$ の係数 a，b，c がどのような場合に，どのような循環節をもつのか，何も示しておらず，今後の研究を待たざるを得ない。ただ，連分数の分母に次々と出てくる，小数部分の逆数が常に α の一次式で表され，しかも必ず前にもどって循環することになることは，自分にとっては大変な驚きであり，無理数が身近で，不思議な存在に思われてきた。

《参考文献》

1) E.ハイラー，G.ワナー「解析教程，上」シュプリンガー・フェアラーク東京

2) 「数学辞典」岩波書店　など

(静岡英和女学院高等学校)