四面体とベクトル

石濱（いしはま）　文武（ふみたけ）

§1．はじめに

空間（3次元）ベクトルに関する最近の大学入試問題の中で，四面体に関する様々な問題がかなり多く見受けられます。2次元空間では，三角形が辺数が最小の多角形であるように，3次元空間では四面体が面数が最小の多面体であることから，四面体の問題が多いのは当然ともいえます。

本稿では，主に最近の入試問題の中から四面体に関する問題を選び，それらを一般の四面体，直稜四面体，正四面体の3種に分類して検討します。

本稿の2番目のテーマは，ベクトルのある種の問題の改良された解法を紹介することです。中には既にこの改良された解法を普通に使われている先生方もおられるかもしれません。特に，〔問題1〕,〔問題3〕,〔問題7〕は類題も多いので「別解」扱いではなく普通の解法として使いたいと考えますがいかがでしょうか。初心者が思いつき易い解法が必ずしも良い解法ではなく，問題の本質に直結する解法が良い解法であって，それを理解しないと生徒はある段階を超えられないのではないのでしょうか。

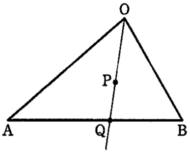
参考までに，筆者の勤務校のテストで，早速この改良された方法で答案を書いた生徒がかなり多くいたことを付記します。

§2．四面体

〔命題1〕 △OAB に対して，

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\ (m>0,\ n>0)$

で定まる点Pについて，直線 OP と辺 AB との交点をQとすれば，Qは辺 AB を $n:m$ に内分する。



〔証明〕 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$

$$=(m+n)\frac{m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}}{n+m}$$

ここで，$\dfrac{m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}}{n+m}=\overrightarrow{OQ'}$ とおけば Q′ は辺 AB を $n:m$ に内分する点であり

$\overrightarrow{OP}=(m+n)\overrightarrow{OQ'}$

により Q′ は直線 OP 上にあるから，Q′ は OP と AB の交点になって，Q′ とQは一致する。$\boxed{\text{証明終}}$

〔問題1〕 四面体 ABCD を考える。
面 ABC 上の点Pと面 BCD 上の点Qについて，

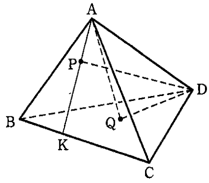
$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ……①,

$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AD}$ ……②

とおくとき，$x:y=s:t$ ならば，線分 AQ と DP が交わることを示せ。

〔00　神戸大〕

(解説) この問題は（3次元）空間で2つの直線が交わることをベクトルを使って証明する問題で，交点がわかっていないので，やや難しい問題であると思われます。**この問題が上記の〔命題1〕の応用題であることに気づくことが大切**です。



〔証明〕 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ と〔命題1〕から，
直線 AP と辺 BC との交点（Kとする）は辺 BC を $y:x$ に内分する点である。……③

次に，$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AD}$

において，Qは平面 BCD 上にあるから

$s+t+u=1$

が成立する。したがって

$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+(1-s-t)\overrightarrow{AD}$

となるから

$\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AD}$

$=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+(-s-t)\overrightarrow{AD}$

$=s(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+t(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$

$=s\overrightarrow{DB}+t\overrightarrow{DC}$

これと〔命題1〕から

直線DQと辺BCとの交点(K′とする)は辺BCを$t:s$に内分する点である。……④

仮定により　$y:x=t:s$

であるから③，④よりKとK′は一致する。

したがって3点D，Q，Kは一直線上にある。

すなわちP，Qは平面AKD上にあることになり線分AQとDPは交わる($x+y=0$ の場合は $x\geqq0$，$y\geqq0$ から $x=y=0$ となり P=A でAQ，BPはAを共有する)。証明終

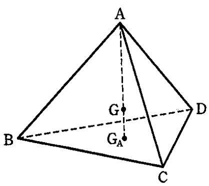
〔問題2〕　四面体には頂点とその頂点を含まない面の重心を結ぶ線分が合計4本ある。これらの4本の線分は1点で交わることを示せ。

〔00　大阪女子大〕

(解説)　この問題は四面体の重心の存在証明と同値です。**問題が四面体の4頂点A，B，C，Dについて対称であることに注意して**

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$$

で定まる点Gを使うことに気づけば次のような解答がつくれます。一度この解法を知れば類似の問題で対称性を利用する解法を使える生徒もいると思われます。



〔証明〕　四面体ABCDの頂点A，B，C，Dの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$とし，△BCD，△CDA，△DAB，△ABCの重心をそれぞれG_A，G_B，G_C，G_Dとする。また，$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$を位置ベクトルとする点をGとする。

$$\overrightarrow{AG_A}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}-\vec{a}=\frac{-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}-\vec{a}=\frac{-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

から

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$$

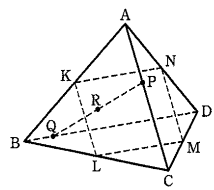
したがって，Gは線分AG_A上にある($AG:GG_A=3:1$)。

同様にして，Gは線分BG_B，CG_C，DG_D上にあることが示されるから4本の線分は1点Gで交わる。

証明終

〔問題3〕　四面体ABCDの向かい合う2辺AC，BD上にそれぞれ点P，Qをとり，線分PQの中点をRとおく。このとき，点Rの軌跡が平面上にあることを示し，その平面をいえ(4辺AB，BC，CD，DAの中点をそれぞれK，L，M，Nとせよ)。

(解説)　この問題では軌跡を予測することが肝要です。PがAに，QがBにあるときはRはKにあります。同様に他の極端な3つの場合を考えると，RはL，M，Nにくるので，Rの軌跡は平行四辺形KLMNであると見当をつけます。すると，**$\overrightarrow{KR}$が$\overrightarrow{KL}$と$\overrightarrow{KN}$の線型結合であることを示せばよい**という方針が立ちます。



〔解答〕　$\overrightarrow{KR}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{KQ})$

$=\dfrac{1}{2}\{(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BQ})\}$

ここでKは線分ABの中点であるから

$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

また，P，Qはそれぞれ線分AC，BD上の点であるから

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BQ}=t\overrightarrow{BD}$ $(0\leqq s\leqq1,\ 0\leqq t\leqq1)$

とおける。よって

$\overrightarrow{KR}=\dfrac{1}{2}\{(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BQ})\}$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ})$$

$$=\frac{1}{2}(s\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{BD})$$

$$=s\frac{\overrightarrow{AC}}{2}+t\frac{\overrightarrow{BD}}{2}$$

$$=s\overrightarrow{KL}+t\overrightarrow{KN}$$ （中点連結定理による）

したがって，Rの軌跡は平行四辺形KLMNである。答

§3．直稜四面体（垂心四面体）

向かい合う3組の辺が互いに垂直である四面体を**直稜四面体（垂心四面体）**といいます。

〔問題4〕 四面体OABCで

$$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC},\ \mathrm{OB}\perp\mathrm{CA} \Longrightarrow \mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$$

が成り立つことを示せ。

(解説) この問題はよく知られている問題ですが，直稜四面体を強調するために取り上げました。解法には特段の工夫の余地はありません。また，この四面体では，各頂点から対面に下ろした垂線の足は対面（三角形）の垂心になっていて，4本の垂線は1点で交わるので，直稜四面体は垂心四面体とも呼ばれます。

〔証明〕 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ から $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$ から $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$

したがって

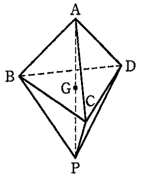
$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$\therefore$ $\mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$ 証明終

§4．正四面体

〔問題5〕 四面体ABCDは各辺の長さが1の正四面体とする。A，B，C，Dのいずれとも異なる空間内の点Pと点Qを，四面体PBCDと四面体QABCがともに正四面体になるようにとるとき，cos∠PBQの値を求めよ。 〔02 東北大〕

(解説) 2つの正四面体ABCD，PBCDは底面BCDを共有することになるので，頂点A，Pは面BCDに関して対称になります。**∠PBQを問題にしているので，基本ベクトルの始点はこの角の頂点Bにします**（問題が4頂点に関して対称ならば基本ベクトルの始点はどこでもよい）。



〔解答〕 △BCDの重心をGとすると

$$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AG}$$

である。

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{d}$ とおくと

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AG}$$

$$=\overrightarrow{BA}+2(\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA})$$

$$=2\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}=2\frac{\vec{c}+\vec{d}}{3}-\vec{a}$$

$$=\frac{-3\vec{a}+2\vec{c}+2\vec{d}}{3}\ \cdots①$$

同様にして

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{2\vec{a}+2\vec{c}-3\vec{d}}{3}\ \cdots②$$

を得る。

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2},\ |\vec{a}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$$

と①，②を用いて 内積 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ を展開すれば

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\frac{7}{18}$ となるから

$$\cos\angle\mathrm{PBQ}=\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}}{|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{BQ}|}=\frac{-\frac{7}{18}}{1\cdot1}=-\frac{7}{18}$$ 答

〔問題6〕 四面体OABCは次の2つの条件

(i) OA⊥BC，OB⊥AC，OC⊥AB，

(ii) 4つの面の面積がすべて等しい。

を満たしているとき，この四面体は正四面体であることを示せ。 〔03 京都大〕

(解説) 〔問題4〕と条件(i)から，この四面体は直稜四面体で，**条件(ii)を付け加えると正四面体になる**わけです。この問題についても解答に特段の工夫はありません（幾何を使うとかえって長くなる）。

〔証明〕 〔問題4〕のように $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を定めると(i)から〔問題4〕と同様にして

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\ \cdots\cdots①$$

を得る。面積について

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$\triangle OBC=\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{b}||\vec{c}|)^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$$

$$\triangle OCA=\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{c}||\vec{a}|)^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

$\triangle OAB=\triangle OBC$ と①から

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|$$

を得る。同様にして

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ すなわち OA=OB=OC

を得る。

条件(i), (ii)は4点O, A, B, Cについて対称であるから，同様にして

OA=OB=OC=AB=BC=CA

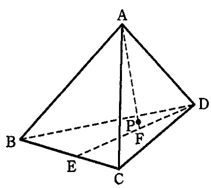
を得る。よって，この四面体は正四面体である。

証明終

§5．その他

〔問題7〕 四面体ABCDに対して
$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}+8\overrightarrow{DP}=\vec{0}$
を満たす点Pはどのような位置にあるか。

(解説) この問題は，四面体の内部の点Pの位置を確定するもので，よくある問題です。また，四面体そのものを問題にはしていません。取り上げた理由は解法にあります。この形(一般化したものを後述します)の問題は**始点を統一しないままで解くことができて，手間が省ける**ことを注意します。いわゆる**分点ベクトルを活用する**ことが要点です。



〔解答〕 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}+8\overrightarrow{PD}$

$$=7\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{7}+8\overrightarrow{PD}$$

ここで $\dfrac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{7}=\overrightarrow{PE}$ ……① とおくと

$$\overrightarrow{AP}=7\overrightarrow{PE}+8\overrightarrow{PD}=15\frac{7\overrightarrow{PE}+8\overrightarrow{PD}}{15}$$

ここで $\dfrac{7\overrightarrow{PE}+8\overrightarrow{PD}}{15}=\overrightarrow{PF}$ ……② とおくと

$\overrightarrow{AP}=15\overrightarrow{PF}$ ……③

①からEは(点Pの位置に関係なく)線分BCを4：3に内分する点である。②についても同様に解釈する。

答 線分BCを4：3に内分する点をE，
線分EDを8：7に内分する点をFとして
線分AFを15：1に内分する点がPである。

〔一般化〕 四面体ABCDに対して
$\overrightarrow{AP}+l\overrightarrow{BP}+m\overrightarrow{CP}+n\overrightarrow{DP}=\vec{0}$
$(l>0,\ m>0,\ n>0)$
を満たす点Pはどのような位置にあるか。

〔解答〕 $\overrightarrow{AP}=l\overrightarrow{PB}+m\overrightarrow{PC}+n\overrightarrow{PD}$

$$=(l+m)\frac{l\overrightarrow{PB}+m\overrightarrow{PC}}{l+m}+n\overrightarrow{PD}$$

$$=(l+m)\overrightarrow{PE}+n\overrightarrow{PD}$$

$$\left(\overrightarrow{PE}=\frac{l\overrightarrow{PB}+m\overrightarrow{PC}}{l+m}\right)$$

$$=(l+m+n)\frac{(l+m)\overrightarrow{PE}+n\overrightarrow{PD}}{l+m+n}$$

$$=(l+m+n)\overrightarrow{PF}$$

$$\left(\overrightarrow{PF}=\frac{(l+m)\overrightarrow{PE}+n\overrightarrow{PD}}{l+m+n}\right)$$

から

線分BCを $m:l$ に内分する点をE，
線分EDを $n:(l+m)$ に内分する点をFとして
線分AFを $(l+m+n):1$ に内分する点がPである。答

(神奈川県立湘南高等学校)