$X^n+Y^{n+1}=Z^{n+2}$ の自然数解について

柳田（やなぎだ） 五夫（いつお）

§1．はじめに

フェルマーの最終予想「$X^n+Y^n=Z^n$ という方程式はnが2より大きい自然数であれば，自然数解をもたない」はA.ワイルズによって証明されたが，ここでは $X^n+Y^n=Z^n$ のかわりに

$$X^n+Y^{n+1}=Z^{n+2} \quad \cdots\cdots①$$

について考えてみた。

$n=3$ のとき①の自然数解をコンピュータを使って求めてみると（ソフトはUBASICを使用）

$(X,\ Y,\ Z)$

$=(2^8,\ 2^6,\ 2^5),\qquad (1+1=2)$

$(3\cdot5^5,\ 5^4,\ 2\cdot5^3),\qquad (3^3+5=2^5)$

$(2^5\cdot3^8,\ 2^4\cdot3^6,\ 2^3\cdot3^5),\qquad (1+2=3)$

$(2^4\cdot7^5,\ 2^3\cdot7^4,\ 2^3\cdot7^3),\qquad (1+7=2^3)$

$(2^7\cdot3^8,\ 2^5\cdot3^6,\ 2^4\cdot3^5),\qquad (2+1=3)$

$(2^4\cdot7^7,\ 2^3\cdot7^5,\ 2^3\cdot7^4),\qquad (7+1=2^3)$

$(2^{16}\cdot3^5,\ 2^{12}\cdot3^4,\ 2^{10}\cdot3^3),\qquad (1+3=2^2)$

$(2^{16}\cdot3^5\cdot5,\ 2^{12}\cdot3^4,\ 2^{11}\cdot3^3),\qquad (5^3+3=2^7)$

$(2\cdot3^{16},\ 3^{12},\ 3^{10}),\qquad (2^3+1=3^2)$

$(31^5,\ 31^4,\ 2\cdot31^3),\qquad (1+31=2^5)$

$(2^4\cdot3^7\cdot5^5,\ 2^3\cdot3^5\cdot5^4,\ 2^3\cdot3^4\cdot5^3),\qquad (3+5=2^3)$

$(2^{16}\cdot3^7,\ 2^{12}\cdot3^5,\ 2^{10}\cdot3^4),\qquad (3+1=2^2)$

$(2^{28},\ 2^{21},\ 2^{17}),\qquad (1+1=2)$

$(2^4\cdot3^5\cdot5^7,\ 2^3\cdot3^4\cdot5^5,\ 2^3\cdot3^3\cdot5^4),\qquad (5+3=2^3)$

のようになる。(　)内の式は例えば，$(3^3+5=2^5)$ は

$$(3\cdot5^5)^3+(5^4)^4=(2\cdot5^3)^5 \iff$$

$$3^3\cdot5^{15}+5^{16}=2^5\cdot5^{15} \iff \underline{3^3+5=2^5}$$

の＿＿下線部を書いたものである。

これらの解をみるとXとYが互いに素ではなさそうである。

【予想1】「$n\geqq3$ でXとYが互いに素なとき，①は自然数解をもたない。」

（どなたか証明かコンピュータで反例を見つけてください。）

因みに，$n=2$ のとき，①はXとYが互いに素な自然数解

$(X,\ Y,\ Z)=(433,\ 11\cdot13,\ 2\cdot3\cdot7)$,

$(7\cdot11\cdot79,\ 23,\ 2\cdot3\cdot13)\cdots$ をもつ。

ところで，$n=3$ のとき，①は自然数解を無数にもつことを示すことができる。

そのためには $1+1=2$ 型の解が2組

$$(X,\ Y,\ Z)=(2^8,\ 2^6,\ 2^5),\ (2^{28},\ 2^{21},\ 2^{17})$$

見つかっているので，$1+1=2$ 型の解が無数にあることを示せばよい。

$1+1=2$ の両辺に $2^{3\cdot4k}=2^{12k}$ （kは整数，$k\geqq0$）を掛けると

$$(2^{4k})^3+(2^{3k})^4=2^{12k+1}$$

$12k+1$ が5の倍数になればよいから

$$12k+1=5l$$

とすると

$$12(k-2)=5(l-5)$$

$k-2=5p(l-5=12p)$ とおくと

$$(2^{4(5p+2)})^3+(2^{3(5p+2)})^4=(2^{12p+5})^5$$

（pは0以上の整数）

したがって，$X^3+Y^4=Z^5$ は自然数解

$$(X,\ Y,\ Z)=(2^{4(5p+2)},\ 2^{3(5p+2)},\ 2^{12p+5})$$

（pは0以上の整数）

をもつ。

他の型の解についても同様にして自然数解を求めることができる。

§2．$n=4$ の場合

$n=4$ のとき①の自然数解をコンピュータを使って求めてみると

$(X,\ Y,\ Z)=(2^3\cdot3^{10},\ 2^3\cdot3^8,\ 2^2\cdot3^7),\ (1+2^3=3^2)$

$(2^{10}\cdot3^6,\ 2^8\cdot3^5,\ 2^7\cdot3^4),\ (1+3=2^2)$

$\cdots\cdots$

となる。

$1+2^3=3^2$ 型の解はこの両辺に

$2^{\frac{4\cdot6}{2}k}3^{4\cdot5l}=2^{12k}3^{20l}$ を掛けると

$$(2^{3k}3^{5l})^4+2^{12k+3}(3^{4l})^5=(2^{2k})^6 3^{20l+2}$$

$12k+3$ が5の倍数，$20l+2$ が6の倍数になればよいから $12k+3=5p_1$，$20l+2=6q_1$ とすると

$$12(k-1)=5(p_1-3),\ 10(l-2)=3(q_1-7)$$

$$k-1=5p\ (p_1-3=12p),\ l-2=3q\ (q_1-7=10q)$$

(p，q は0以上の整数) とおくと

$$(2^{3(5p+1)}3^{5(3q+2)})^4+(2^{3(4p+1)}3^{4(3q+2)})^5$$
$$=(2^{2(5p+1)}3^{10q+7})^6$$

したがって，$X^4+Y^5=Z^6$ は自然数解

$$(X,\ Y,\ Z)$$
$$=(2^{3(5p+1)}3^{5(3q+2)},\ 2^{3(4p+1)}3^{4(3q+2)},\ 2^{2(5p+1)}3^{10q+7})$$

(p，q は0以上の整数)

をもつ。

§3．n が3以上の奇数の場合

n が3以上の奇数の場合，①の自然数解は次の②型から求めることができる。

$$x^s+y^t=z^u\ \cdots\cdots②$$

(x，y，z は自然数，s，t，u は非負の整数)

を満たす整数 x，y，z，s，t，u に対して②の両辺に $x^{(n+1)(n+2)k}y^{n(n+2)l}z^{n(n+1)m}$ をかけて $X^3+Y^4=Z^5$ の $1+1=2$ 型の解を求めたときと同じように考える。

$$x^{(n+1)(n+2)k+s}(y^{(n+2)l}z^{(n+1)m})^n$$
$$+y^{n(n+2)l+t}(x^{(n+2)k}z^{nm})^{n+1}$$
$$=z^{n(n+1)m+u}(x^{(n+1)k}y^{nl})^{n+2}$$

で $(n+1)(n+2)k+s$ が n の倍数，$n(n+2)l+t$ が $n+1$ の倍数，$n(n+1)m+u$ が $n+2$ の倍数になるようにしたい。

$$(n+1)(n+2)k+s=np_1,$$
$$n(n+2)l+t=(n+1)q_1,$$
$$n(n+1)m+u=(n+2)r_1$$

(k，l，m は非負の整数)

とおくと

$$(n+1)(n+2)\left(k-\frac{n-1}{2}s\right)=n\left(p_1-\frac{n^2+2n-1}{2}s\right)$$
$$n(n+2)(l-t)=(n+1)(q_1-(n+1)t)$$
$$n(n+1)\left(m-\frac{n+1}{2}u\right)=(n+2)\left(r_1-\frac{n^2+1}{2}u\right)$$

n と $n+1$，n と $n+2$，$n+1$ と $n+2$ は互いに素であるから

$$k-\frac{n-1}{2}s=np,$$
$$p_1-\frac{n^2+2n-1}{2}s=(n+1)(n+2)p$$
$$l-t=(n+1)q,\quad q_1-(n+1)t=n(n+2)q$$
$$m-\frac{n+1}{2}u=(n+2)r,$$
$$r_1-\frac{n^2+1}{2}u=n(n+1)r$$

とおける。ただし，p，q，r は整数で

$$np+\frac{n-1}{2}s\geqq 0,\ (n+1)q+t\geqq 0,$$
$$(n+2)r+\frac{n+1}{2}u\geqq 0\ \cdots\cdots③$$

を満たすものとする。

このとき，

$$(x^{(n+1)(n+2)p+\frac{n^2+2n-1}{2}s}y^{(n+1)(n+2)q+(n+2)t}$$
$$\times z^{(n+1)(n+2)r+\frac{(n+1)^2}{2}u})^n$$
$$+(x^{n(n+2)p+\frac{(n-1)(n+2)}{2}s}y^{n(n+2)q+(n+1)t}z^{n(n+2)r+\frac{n(n+1)}{2}u})^{n+1}$$
$$=(x^{n(n+1)p+\frac{(n+1)(n-1)}{2}s}y^{n(n+1)q+nt}z^{n(n+1)r+\frac{n^2+1}{2}u})^{n+2}$$
$$\cdots\cdots④$$

例えば $x=y=1$，$z=2$，$s=t=u=1$ とおくと②は $1+1=2$ となり，④は

$$(2^{(n+1)(n+2)r+\frac{(n+1)^2}{2}})^n+(2^{n(n+2)r+\frac{n(n+1)}{2}})^{n+1}$$
$$=(2^{n(n+1)r+\frac{n^2+1}{2}})^{n+2}\quad (r\geqq 0)\ \cdots\cdots⑤$$

となる。⑤から①は自然数解を無数にもつことがわかる。

さて，①は自然数解を無数にもつことがわかったが，①で例えば Z が最小となるような解は求まるだろうか。

【予想2】「n が3以上の奇数のとき，①における自然数解のうちで Z が最小のものは $(X,\ Y,\ Z)=(2^{\frac{(n+1)^2}{2}},\ 2^{\frac{n(n+1)}{2}},\ 2^{\frac{n^2+1}{2}})$ である。」

§4．n が2以上の偶数の場合

n が2以上の偶数の場合も①の自然数解は次の⑥型から求めることができる。

$$x^{2s}+y^t=z^{2u}\ \cdots\cdots⑥$$

(x，y，z，u は自然数，s，t は非負の整数)

を満たす整数 x，y，z，s，t，u に対して⑥の両辺に $x^{(n+1)(n+2)k}y^{\frac{n(n+2)}{2}l}z^{n(n+1)m}$ を掛けて n が3以上の奇数の場合と同様にして

$$(x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}p+(n^2+2n-1)s}y^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}q+(n+2)t}$$

$$\times z^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}r+\frac{n(n+1)}{2}u})^n$$

$$+(x^{\frac{n(n+2)}{2}p+(n-1)(n+2)s}y^{\frac{n(n+2)}{2}q+(n+1)t}z^{\frac{n(n+2)}{2}r+\frac{n^2}{2}u})^{n+1}$$

$$=(x^{\frac{n(n+1)}{2}p+(n^2-1)s}y^{\frac{n(n+1)}{2}q+nt}z^{\frac{n(n+1)}{2}r+\frac{n^2-n+2}{2}u})^{n+2} \quad \cdots\cdots⑦$$

を得る。ただし，p，q，r は整数で

$$\frac{n}{2}p+(n-1)s\geqq 0,\ (n+1)q+2t\geqq 0,$$

$$(n+2)r+nu\geqq 0 \quad \cdots\cdots⑧$$

を満たすものとする。

例えば $x=1$，$y=3$，$z=2$，$s=0$，$t=1$，$u=1$ とおくと⑥は

$1+3=2^2$ となり，⑦は

$$(3^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}q+(n+2)}2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}r+\frac{n(n+1)}{2}})^n$$

$$+(3^{\frac{n(n+2)}{2}q+(n+1)}2^{\frac{n(n+2)}{2}r+\frac{n^2}{2}})^{n+1}$$

$$=(3^{\frac{n(n+1)}{2}q+n}2^{\frac{n(n+1)}{2}r+\frac{n^2-n+2}{2}})^{n+2} \quad (q\geqq 0,\ r\geqq 0) \quad \cdots\cdots⑨$$

となる。

$3^{\frac{n(n+1)}{2}q+n}2^{\frac{n(n+1)}{2}r+\frac{n^2-n+2}{2}}$ $(q\geqq 0,\ r\geqq 0)$ の最小値を $Z^{(n)}_{1+3=2^2}$ とおくと

$$Z^{(n)}_{1+3=2^2}=3^n\cdot 2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$$

次に $x=1$，$y=2$，$z=3$，$s=0$，$t=3$，$u=1$ とおくと⑥は

$1+2^3=3^2$ となり，⑦は

$$(2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}q+3(n+2)}3^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}r+\frac{n(n+1)}{2}})^n$$

$$+(2^{\frac{n(n+2)}{2}q+3(n+1)}3^{\frac{n(n+2)}{2}r+\frac{n^2}{2}})^{n+1}$$

$$=(2^{\frac{n(n+1)}{2}q+3n}3^{\frac{n(n+1)}{2}r+\frac{n^2-n+2}{2}})^{n+2} \quad \cdots\cdots⑩$$

ただし，p，q，r は整数で $(n+1)q+6\geqq 0$，$r\geqq 0$ を満たすものとする。

ここで，

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}q+3n}3^{\frac{n(n+1)}{2}r+\frac{n^2-n+2}{2}}$$

$$((n+1)q+6\geqq 0,\ r\geqq 0)$$

の最小値を $Z^{(n)}_{1+2^3=3^2}$ とおく。

(i) $n=2$ のとき $q=-2$，$r=0$ で最小値をとり

$Z^{(2)}_{1+2^3=3^2}=3^2$

(ii) $n=4$ のとき $q=-1$，$r=0$ で最小値をとり

$Z^{(4)}_{1+2^3=3^2}=2^2\cdot 3^7$

これは①における自然数解のうちで Z が最小となるものである。

(iii) $n\geqq 6$ のとき $q=0$，$r=0$ で最小値をとり

$Z^{(n)}_{1+2^3=3^2}=2^{3n}\cdot 3^{\frac{n^2-n+2}{2}}$

$Z^{(n)}_{1+2^3=3^2}$ と $Z^{(n)}_{1+3=2^2}$ を比較すると

$Z^{(n)}_{1+2^3=3^2}=8^n\cdot 3^{\frac{n^2-n+2}{2}}>3^n\cdot 2^{\frac{n^2-n+2}{2}}=Z^{(n)}_{1+3=2^2}$

となる。

【予想3】「n が $n\geqq 6$ を満たす偶数のとき，①における自然数解のうちで Z が最小のものは $(X,\ Y,\ Z)=(3^{n+2}\cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}},\ 3^{n+1}\cdot 2^{\frac{n^2}{2}},\ 3^n\cdot 2^{\frac{n^2-n+2}{2}})$ である。」

§5．おわりに

「§1. はじめに」で $n=3$ のとき，$X^3+Y^4=Z^5$ の自然数解の型をみたが，$n\geqq 3$ ならば②型（n が奇数のとき），⑥型（n が偶数のとき）とも x，y，z は素数または1として①の解が求まりそうであるが，どうであろうか？

（$n=2$ のときは，残念ながら $7^2+24^2=5^4$ 型から求まる解 $(X,\ Y,\ Z)=(63,\ 36,\ 15)$ がある。）

以上「$X^{f(n)}+Y^{g(n)}=Z^{h(n)}$ （f，g，h は整式で常に $f(n)\leqq g(n)\leqq h(n)$）を満たす自然数解の存在」について，$f(n)=n$，$g(n)=n+1$，$h(n)=n+2$ の場合を考えたことになる。（$f(n)=g(n)=h(n)=n$ の場合がフェルマーの最終予想問題）

一般の f，g，h に対して自然数解は存在するのであろうか？（$f(n)$ と $g(n)$，$f(n)$ と $h(n)$，$g(n)$ と $h(n)$ が互いに素であるときは，「§3. n が3以上の奇数の場合」と同様にして自然数解が存在することを証明できる。）

（栃木県立真岡高等学校）