不等式をつくる

仁平（にへい） 政一（まさかず）

§1．はじめに

1997 年度の学習院大学の入試問題に次のような問題が出題された。

> a は正の整数とする。このとき，すべての $x \geqq 0$ と自然数 n に対して不等式
> $$x^n - a^n \geqq na^{n-1}(x-a)$$
> が成り立つことを示せ。

この問題は「①微分法　②因数分解　③数学的帰納法」など，多様な方法で解くことができる。3 年生の数学演習の授業で扱った折り，教育的な意味で良問であるという印象をもった。

その後，ふと
$$x^n - a^n \leqq f(a,\ n)(x-a)$$
という形の不等式が作れないかと気になった。

そこで，$a=1$ の場合で
$$x^n - 1^n \leqq f(1,\ x,\ n)(x-1)$$
の形の不等式を作ることを試みた。

何か手がかりがないと思考を進めることができないので，単純な等式
$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$
を手がかりにした。それでは，早速本論に入ろう。

§2．不等式をつくる

あきらかに，任意の実数 x に対して，常に
$$(x+1)(x-1)=x^2-1$$
は成り立つ。それでは

$(x^2+1)(x-1)$ と x^3-1 との関係はどうだろうか。話の便宜上，$x>1$ と仮定する。このとき，
$$(x^2+1)(x-1) \leqq x^3-1 \quad (x>1)$$
が成り立つことはすぐわかる。これでは数学的には面白味がない。そこで，
$$c(x^2+1)(x-1) \geqq x^3-1 \quad (x>1) \quad \cdots\cdots ①$$
を満たすような（可能な限り小さい）定数 c について考察しよう。

①は
$$c \geqq \frac{x^3-1}{(x^2+1)(x-1)}$$
と変形できるから，関数
$$f(x)=\frac{x^3-1}{(x^2+1)(x-1)} \quad (x>1)$$
の上界を求めればよい。関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ で表すと
$$f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$
よって，$x>1$ のとき，$f(x)$ は減少関数となる。
$$\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{x^3-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{3}{2}$$
より，
$$\frac{3}{2}(x^2+1)(x-1) \geqq x^3-1 \quad (x>1) \quad \cdots\cdots ②$$
を得る。

不等式②は $x=1$ のときも成り立つから，つぎの命題を得る。

> **〔命題 1〕** $x \geqq 1$ のとき，不等式
> $$3(x^2+1)(x-1) \geqq 2(x^3-1)$$
> が成り立つ。

次に，この命題の一般化を考察しよう。

そこで，$x>1$ で，p は正の整数のとき，
$$c(x^p+1)(x-1) \geqq x^{p+1}-1 \quad \cdots\cdots ③$$
を満たすような，可能な限り小さい定数 c を求めてみよう。

③は，$x>1$ のとき
$$c \geqq \frac{x^{p+1}-1}{(x^p+1)(x-1)}$$
と変形できるから，上記の議論と同様に関数
$$f(x)=\frac{x^{p+1}-1}{(x^p+1)(x-1)} \quad (x>1,\ p \text{ は正の整数})$$
の値の上界を求めればよいことになる。

関数 $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=-\frac{x^{2p}-px^{p+1}+px^{p-1}-1}{(x^p+1)^2(x-1)^2}\quad\cdots\cdots④$$

である。ここで，分子を $g(x)$ とおく。

すなわち　$g(x)=x^{2p}-px^{p+1}+px^{p-1}-1$

このとき

$$\begin{aligned}g(x)&=((x^2)^p-1)-px^{p-1}(x^2-1)\\&=(x^2-1)\{((x^2)^{p-1}+(x^2)^{p-2}+\cdots+1)\\&\qquad\qquad-px^{p-1}\}\quad\cdots\cdots⑤\end{aligned}$$

と変形できる。ところで，$x>0$ のとき，「相加平均≧相乗平均」により

$$\begin{aligned}&(x^2)^{p-1}+(x^2)^{p-2}+\cdots+1\\&\qquad\geqq p\sqrt[p]{(x^2)^{(1+2+\cdots+(p-1))}}=px^{p-1}\end{aligned}$$

が得られるから，$x>1$ のとき，$g(x)$ は常に正であることがわかる。

よって，④から，$x>1$ のとき，$f(x)$ は減少関数になっていることがわかる。

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^{p+1}-1}{(x-1)(x^p+1)}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(p+1)x^p}{px^{p-1}(x-1)+x^p+1}=\frac{p+1}{2}$$

から，$c=\dfrac{p+1}{2}$ とすれば，③により，

$$(p+1)(x-1)(x^p+1)\geqq 2(x^{p+1}-1)\quad\cdots\cdots⑥$$

を得る。

ところで，⑥は $x=1$ のときも成り立つから，次の定理が得られる。

> **〔定理1〕**　$x\geqq 1$ で，p は正の整数とする。このとき不等式
> $$(p+1)(x-1)(x^p+1)\geqq 2(x^{p+1}-1)$$
> が成り立つ。$p=1$ のときは x の値にかかわらず等号が成立する。

次に，$x\leqq 1$ の場合を考察しよう。

ここで，不等式

$$(x^2)^{p-1}+(x^2)^{p-2}+\cdots+1\geqq px^{p-1}\quad(p\text{ は正の整数})\quad\cdots\cdots⑦$$

は $x\leqq 0$ のときも成り立つことを示そう。

$x=0$ のときは，明らかに⑦は成り立つから，$x<0$ と仮定してよい。

(ｱ)　p が偶数のとき

$p-1$ は奇数となり，$x^{p-1}<0$

ところが，不等式の左側は正であるから，不等式⑦は成り立つ。

(ｲ)　p が奇数のとき

$x=-y\ (y>0)$ とおくと，$(-y)^2=y^2$ から

$$\begin{aligned}&(x^2)^{p-1}+(x^2)^{p-2}+\cdots+1\\&=(y^2)^{p-1}+(y^2)^{p-2}+\cdots+1\end{aligned}$$

となる。また

$$px^{p-1}=p(-y)^{p-1}=p(-1)^{p-1}y^{p-1}=py^{p-1}$$

であるから，$x>0$ の場合に帰着する。

したがって，不等式⑦は $x\leqq 0$ のときも成立する。

このことから，$-1<x<1$ のとき，$g(x)$ は常に負となる。よって，④から，関数 $f(x)$ は $-1<x<1$ で増加している。したがって，

$$\lim_{x\to -1+0}f(x)\leqq f(x)\leqq\lim_{x\to 1-0}f(x)$$

ここで

$$\lim_{x\to -1+0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{x^{p+1}-1}{(x-1)(x^p+1)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ (p\text{ は偶数})\\[2mm]\dfrac{p+1}{2p}\ (p\text{ は奇数})\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^{p+1}-1}{(x-1)(x^p+1)}=\frac{p+1}{2}$$

であることに注意すれば，次の系1が得られる。

> **〔系1〕**　$-1\leqq x\leqq 1$ で，p が正の整数のとき，次の不等式が成り立つ。
>
> (1)　p が偶数のとき
> $$(p+1)(x-1)(x^p+1)\leqq 2(x^{p+1}-1)\leqq(x-1)(x^p+1)$$
> (2)　p が奇数のとき
> $$p(p+1)(x-1)(x^p+1)\leqq 2p(x^{p+1}-1)\leqq(p+1)(x-1)(x^p+1)$$

最後に $x\leqq -1$ の場合を考察しよう。

⑤と⑦から，$x<-1$ のとき，$g(x)$ は常に正になる。よって，④から，$x<-1$ のとき，$f(x)$ は減少関数である。

ここで，

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^{p+1}-1}{(x-1)(x^p+1)}=1$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{x^{p+1}-1}{(x-1)(x^p+1)}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ (p\text{ は偶数})\\ \dfrac{p+1}{2p}\ (p\text{ は奇数})\end{cases}$$
であることに注意すれば，次の系２が得られる。

〔系２〕 $x\leqq -1$ で，p が正の整数のとき，次の不等式が成り立つ。
(1)　p が偶数のとき
$$2(x-1)(x^p+1)\leqq 2(x^{p+1}-1)\leqq (x-1)(x^p+1)$$
(2)　p が奇数のとき
$$(p+1)(x-1)(x^p+1)\leqq 2p(x^{p+1}-1)\leqq 2p(x-1)(x^p+1)$$

§3．おわりに

本稿を閉じるにあたって，上記の不等式が高校の教材として妥当であるかどうかについて考察してみよう。

どの数学IIの教科書や参考書にも，導関数の応用の１つとして，次のような不等式の証明問題が取り上げられている (1) 参照)。

$x\geqq 0$ のとき，不等式
$$x^3>3x^2-5$$
を証明せよ。

そこで，本稿で作った命題１を

$x\geqq 1$ のとき，不等式
$$3(x^2+1)(x-1)\geqq 2(x^3-1)$$
を証明せよ。

という問題として考えてみよう。

この問題は因数分解を用いても，証明できるが，
$$f(x)=3(x^2+1)(x-1)-2(x^3-1)$$
とおいたとき，
$$f(1)=0 \text{ かつ } f'(x)=3(x-1)^2$$
となるので，数学IIの微分の応用問題として案外おもしろいのではないかと思っている。

次に定理１の不等式は
$$g(x)=(p+1)(x-1)(x^p+1)-2(x^{p+1}-1)$$
とおいたとき，
$$g'(x)=(p+1)\{(p-1)x^p-px^{p-1}+1\}$$
であるから
$$g''(x)=p(p+1)(p-1)x^{p-2}(x-1)$$
となる。よって $x\geqq 1$ のとき
$$g''(x)\geqq 0 \text{ かつ } g'(1)=0$$
となり，$g'(x)\geqq 0$ が得られる。このことから $x\geqq 1$ のとき，$g(x)\geqq 0$ となることがわかるから，数学IIIでの微分の応用の手頃な教材の１つになるのではないかと考えている。系１，系２についても同様なことがいえよう。

また，本文で見てきたように分数関数の極限値の問題としても扱えるので，この点においても教材としての価値があるのではないかと考えている。

さて，話は変わるが，最近の大学入試問題に，背理法について説明させる問題とか，円周率に関する問題が出題されるなど，いろいろと工夫の跡が見られる。高校の現場としては有り難いことである。

ところで，「ある単純な問題を与え，その問題を一般化させ解かせる」等の入試問題もあってもよいのではないかと思っている。「適切な問題の作成」とか「採点基準上の問題」とかいろいろと困難な点があることは予想されるが…。

《参考文献》

1) 「チャート式　解法と演習　数学II＋B」
(平成 15 年 11 月発行)　数研出版　p.236
2) 「チャート式　解法と演習　数学III＋C」
(平成 11 年 2 月発行)　数研出版

(茨城県　常総学院高等学校)