${}_nC_r$ に関する一考察

小林　敬正（こばやし　ゆきまさ）

§1．きっかけ

〔問題〕 A，Bの2チームが野球の試合を行う。先に4勝した方を優勝とするとき，Aが優勝する勝ち方は何通りあるか。ただし，引き分けはないものとする。

数年前，釧路管内の研究会で，ある指導主事から問いかけられた問題である。何の変哲もないありふれた問題の1つである。たまたま，最前列にいたある学校の先生が指名され，次のような解法を提示した。

(解答) Aの勝ちパターンは

(4戦中)4勝0敗，(5戦中)4勝1敗，

(6戦中)4勝2敗，(7戦中)4勝3敗

の4タイプ考えられるので，最後は必ず勝ち，その手前までに3勝していることに注意して

$${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3=35\text{（通り）}$$

ところが主事が言うには，同じ問題をある生徒に投げかけたところ，${}_7C_4=35$(通り)という答えが返ってきたそうで，このような解法が可能であることが明確に説明できないというものだった。

最大7戦までもつれ込み，先に4勝すればいいのだから ${}_7C_4$ は単なる偶然ではないはず。確かに例えば，先に5勝した方が優勝とした場合，最大もつれ込んで9戦だから，${}_9C_5$ で答えは得られてしまう。

§2．${}_7C_4$ で答えが得られる理由

これは次のように考えると容易に理解できる。

○…Aが勝ち　×…Aが負け

と表すことにすると

(図1)

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
×	○	×	×	○	○	○

この例のように7つの枠(最大7戦)に○×を記すことで，7戦中何勝何敗かが瞬時に理解できる。この場合は4勝3敗であることを意味する。

(図2)

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
○	×	○	×	○	○	×

勝負が7戦まではもつれ込まない場合が，図2のようなタイプである。この例では，第6戦目が4回目の勝ち(最後の勝ち)になることを意味しており，4勝2敗で勝負が決したことになる。

このように4回目の○印で試合は終了することになるが，それ以降は形式的に×印をつけることにしておくと，○×のつけ方と勝敗が1対1に対応し，優勝までのすべてのタイプが表現できる。この結果から「最大もつれ込んで何勝何敗か(この場合は4勝3敗)」と考えることで，その総数が得られることになる。すなわち

$${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3={}_7C_4\ (=35)\text{通り}$$

が正当化される。

§3．「${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3={}_7C_4$」の意味を考える

ところでこの式にはどんな意味があるのかが気になるところである。そこで

$$\underset{(ア)}{\underline{{}_3C_3}}+\underset{(イ)}{\underline{{}_4C_3}}+\underset{(ウ)}{\underline{{}_5C_3}}+\underset{(エ)}{\underline{{}_6C_3}}=\underset{(オ)}{\underline{{}_7C_4}}\quad\cdots\cdots(\bigstar)$$

のように各項に記号を振っておく。このとき，

(ア)… 4勝0敗　(イ)… 4勝1敗　(ウ)… 4勝2敗

(エ)… 4勝3敗

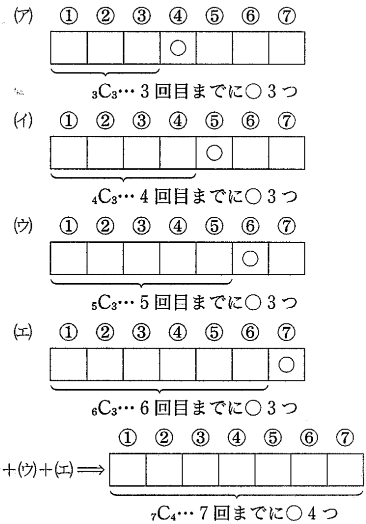
を意味していることから，最後に勝つ(4つ目の○印)のが第何戦目になるのかに注目してみると

(ア)…第4戦目　(イ)…第5戦目　(ウ)…第6戦目

(エ)…第7戦目

となる。このことから最後に勝つ(○印)パターンは，次の図3のア～エまでの4通りになり，(★)の左辺の意味は，○印の位置による場合分け(それ以前までの回に3勝している)と考えることができる。そしてそれらの合計は結局，フリーに○×をつけることに一致し，すなわち右辺と等しくなり，(★)が成立することが明確に理解できる。

(図3)



§4．一般化

ところで，組合せの単元を扱うときにいつも気になっているのが

〔公式〕 $_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ $(1\leqq r\leqq n-1)$

の存在である。これを有効利用する問題を目にした記憶が私自身あまりないのである。しかし，(★)については，$_nC_r$ の和に関する式が一つの式で表現されるという点でこの公式と類似している点もある。そこで試行錯誤して次のような結果が得られた。

この公式から $_{n-1}C_{r-1}={}_nC_r-{}_{n-1}C_r$

∴ $_nC_r={}_{n+1}C_{r+1}-{}_nC_{r+1}$ ……①

ここで①の両辺の n を1，2，…，n とすると

$$_1C_r=\cancel{_2C_{r+1}}-{}_1C_{r+1}$$
$$_2C_r=\cancel{_3C_{r+1}}-\cancel{_2C_{r+1}}$$
$$_3C_r=\cancel{_4C_{r+1}}-\cancel{_3C_{r+1}}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$_nC_r={}_{n+1}C_{r+1}-\cancel{_nC_{r+1}}$$

ここで，$_1C_{r+1}=0$ として，これらの辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^{n} {}_kC_r={}_{n+1}C_{r+1}$$

(ただし，$k<r$ のとき $_kC_r=0$ とする)

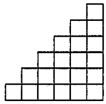
となる。ここで，$r=3$，$n=6$ とすると

$$_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3={}_7C_4$$

が得られることになる。

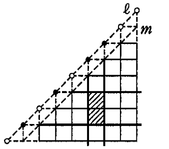
§5．公式 $_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ について

(問題) 右の図の枠内にある四角形は全部でいくつあるか。



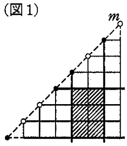
これは，ある雑誌[1]で見かけたものである。その解答にはノーマルな解法のほかに次のような妙手が示されていた。

(解答) 例えば ℓ 上の9つの格子点の中から，図のように4点(黒丸)を選ぶと斜線の四角形が対応し，また逆に1つの四角形に対し ℓ 上の格子点4つが対応する。よって，求める四角形の個数は，$_9C_4=126$ (個)

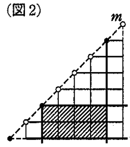


ここで不思議に感じたのが「なぜ階段状の部分に接している直線 m ではなく ℓ なのか」というものである。しかし，その疑問はすぐに解決した。

(図1)



(図2)



例えば，図1における4点の黒丸と斜線の四角形は1対1に対応している。ところが，図2のように斜線の四角形が階段状の部分に接しているようなタイプの場合は，m 上の4点ではなく黒丸3点に対応することがわかる。したがって，この階段状の枠内にはこのような2タイプの四角形が存在しており，この場合分けの必要性がなくまとめて考えられるのが ℓ 上での議論であるといえる。したがって，

図1…$_8C_4=70$ (個)，図2…$_8C_3=56$ (個) から

$_9C_4=126$ (個) すなわち $_9C_4={}_8C_3+{}_8C_4$

となり，公式の図形的な意味付けの1つが得られる。

§6．終わりに

我々が普段何の疑問ももたずに，そしてごく当たり前だと思っていることにも，実はもっと興味深い，価値ある秘密が隠されているのかもしれない。公式，数学的な事実等を「知っているつもり」ではなく，「再検証する必要性」を痛感する考察であった。

《参考文献》

1) 大学への数学 臨時増刊(1992年9月号)

(北海道釧路北陽高等学校教諭)