

あと

後から入れる円順列と順列

くすだ たかし
楠田 貴至

§0. はじめに

かねてより、順列、円順列を指導する中で「特定の2人を、1人とみなす」あるいは「向かい合った2人を、1人とみなす」等の考え方に、違和感を持っていた。隣り合った2人を1人とみなすことはともかく、向かい合った2人を1人とみなすことなど(数学の苦手な)生徒にとっては、理解しづらい事柄である。もちろん、数学の考え方としてはなんら間違いがあるわけではないが、多少なりともイメージしやすい例(場面)をもって説明したいものである。

§1. 円順列

【問題1】 両親と子供4人の計6人が円形のテーブルに着席するとき

- (1) 両親が隣り合って着席する方法は何通りあるか。
- (2) 両親が向かい合って着席する方法は何通りあるか。
- (3) 両親の間に子供1人が着席する方法は何通りあるか。

(1) 両親を1人とみなして、5人を円形に座らせる。そして、両親の並び方が2通りあるから

$$(5-1)! \times 2 = 48 \text{ (通り)}$$

(2) 父親を固定すると母親の位置も決まるから、向かい合う両親を1人と考えて、5人を円形に座らせる方法は、 $(5-1)! = 24$ (通り)

(3) 両親の間に子供1人が座る方法は4通り。そのおのおのに対して、両親の並び方は2通り。よって、両親と間の子供1人の並び方は 4×2 通り。この両親と間の子供1人の計3人を1人とみなして、残り子供3人の計4人が円形のテーブルに座る方法は、 $(4-1)! = 3!$ (通り)

ゆえに、求める着席の方法は

$$(4 \times 2) \times 3! = 48 \text{ (通り)}$$

以上のように普通は説明される。しかし、なにも1人とみなさなくとも以下のように考えてみたらわかりやすいのではないか。

(1) これら家族6人が中華料理を食べに行ったらしよう。店に入って席に着く前にお父さんが「トイレに行ってくる」と行ってしまった。その間に、お母さんと子供たちは、中華料理の丸テーブルに座った。そこにお父さんが戻ってきたところ、お母さんが「お父さん、ここ、ここ。私の横に座って」と言うので、お父さんはお母さんの右(もしくは左)に座った。

お母さんと4人の子供の座り方が $(5-1)!$ 通り。お父さんの座る場所が2か所。だから、

$$(5-1)! \times 2 = 48 \text{ (通り)}$$

(2) お父さんがトイレに行くまでは同じ。お父さんが戻ってきて、お母さんが「お父さん、ここ、ここ。私の前に座って」と言うので、お父さんはお母さんの真向かいに座った。

お母さんと4人の子供の座り方が $(5-1)!$ 通り。お父さんの座る場所が1か所。だから、

$$(5-1)! \times 1 = 24 \text{ (通り)}$$

(3) またまた、お父さんがトイレに行くまでは一緒に、お父さんが戻ってきたときに、お母さんが「お父さんは、この子の向こうに座って」と、となりの子(右または左)を指す。そこでお父さんは、その子をお母さんとの間にはさんで座った。お母さんと4人の子供の座り方が $(5-1)!$ 通り。お父さんの座る場所が2か所。だから、

$$(5-1)! \times 2 = 48 \text{ (通り)}$$

§2. 順列

こうなると、普通の順列も同様に考えられる。

[問題2] 両親と子供4人の計6人が一列に並ぶとき

- (1) 両親が隣り合って並ぶ方法は何通りあるか。
- (2) 両親の間に子供1人が並ぶ方法は何通りあるか。

これらも普通は、

- (1) 両親を1人とみなして5人を並べ、両親の並び方が2通りあるので、 $5! \times 2 = 240$ (通り)
- (2) 両親の間にどの子をはさまれるかで4通り、そのおのおのに対して、両親の並び方が2通り。よって、両親と間の子供1人の並び方は 4×2 (通り)。この両親と間の子供1人の計3人を1人とみなして、残り子供3人の計4人を1列に並べる方法は $4!$ 通り。ゆえに、求める並び方は

$$4 \times 2 \times 4! = 192 \text{ (通り)}$$

とやるでしょう。

しかし、先のようにのけておいて後に入れるという考え方でやってみる。

- (1) 今度はこれら家族6人が家族写真を撮る場面を考えてみよう。お父さんが三脚を立ててカメラの準備をしている間に、お母さんと4人の子供たちは1列に並ぶ。自動シャッターを押してお父さんが走って来る。そこでお母さんが「お父さん、ここ、ここ。私の横に来て」と言ってお父さんとお母さんは並んで写真に写る。

お母さんと4人の子供の並び方が $5!$ 通りで、お父さんの入る場所が、お母さんの右または左で2か所。だから、 $5! \times 2 = 240$ (通り)

- (2) 続けてもう1枚写真を撮る。今度は子供の1人がシャッターを押しに行くが、お父さんも操作を教えるために一緒に行く。その間にお母さんと残りの3人の子供は1列に並ぶ。そして戻ってくるとお父さんは、一緒にシャッターを押しに行った子供をお母さんとの間にはさんで写る。シャッターをお父さんと押しに行く子供の並び方が4通り。お母さんと残りの3人の子供の並び方が $4!$ で、お母さんのどちら側にはさまって写るかによって2通り。

ゆえに、 $4 \times 4! \times 2 = 192$ (通り)

§3. 補足

上記§2. (2)では、お父さんと子供1人の2人をのけているが、それ以前の問題と同じように、お父さん1人をのけておいて、お母さんとの間に子供を1人はさもうと思うと、お母さんが端にきたときとそうでないときの場合分けが必要になってくる。

- (i) お母さんが端にいない場合

子供4人が並んでいる間にお母さんが入り、お父さんはお母さんの左右どちらかに子供を1人はさんで入ればよい。

子供4人の並び方が $4!$ でお母さんの入る場所が子供の間の3か所。お父さんの入る場所が2か所だから

$$4! \times 3 \times 2 = 144 \text{ (通り)}$$

- (ii) お母さんが端にいる場合

子供4人が並んでいる左右どちらかの端にお母さんが入り、お父さんはお母さんの左側もしくは右側(子供のいる側)に子供を1人はさんで入ればよい。

子供4人の並び方が $4!$ でお母さんの入る場所が2か所。お父さんの入る場所が(はさめる方)1か所だから、

$$4! \times 2 \times 1 = 48 \text{ (通り)}$$

以上(i)(ii)あわせて、192通り。

お父さん1人だけをのけることにこだわらず、お父さんと子供1人の2人をのけてやれば、この場合分けをせずに済むのである。

§4. おわりに

現れる式が結局同じのものであっても、その出どころや解釈の仕方は違う。よく式だけを書いて説明がない答案が問題になるが、自分の頭でうまく場面が浮かんでいないために理解不足のまま公式などに走るのではないか。今後も「うまい説明の仕方をつける」ことを考えて行きたいと思う。

《参考文献》

荒木不二洋『改訂版 チャート式 解法と演習 数学I』数研出版

(兵庫県立武庫荘総合高等学校)