立体とそれに内接する球の表面積の比と体積の比について

樋川（ひかわ）　浩史（ひろのぶ）

§1．はじめに

新課程の数学Ⅰでは，これまで中学校で扱われていた「球の表面積と体積」が新たに加わったが，各教科書では，この内容の取り扱いに様々な工夫を凝らしている。

その中でも特に，本校で現在使用している教科書「数研出版 数学Ⅰ」では，円柱や三角柱に内接する球を取り上げ，円柱や三角柱とそれに内接する球との，表面積の比と体積の比が等しくなることを，具体例を用いて示させている。

実はこのことは，球が内接可能な角柱，角錐をはじめとするすべての多面体，直円柱，直円錐について成り立つことがわかる。以下では，これについて生徒にもわかりやすい証明を行うとともに，いくつかの考察を加えることにする。

§2．定理と証明

定理　球が内接可能な立体(角柱，角錐をはじめとする多面体，直円柱，直円錐)と，それに内接する球について，立体の表面積と体積をそれぞれ S_1，V_1，内接球の表面積と体積をそれぞれ S_2，V_2 とするとき，

$$S_1 : S_2 = V_1 : V_2$$

が成り立つ。

(証明)　$S_1 : V_1 = S_2 : V_2$ であることを示せばよい。

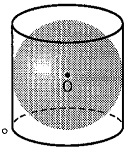
まず，内接球の半径を r とすると，

$$S_2 = 4\pi r^2,\quad V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

であるから，$S_2 : V_2 = 1 : \frac{r}{3}$ である。したがって，$S_1 : V_1 = 1 : \frac{r}{3}$ すなわち $V_1 = \frac{1}{3}S_1 r \cdots (*)$ を示せばよいことになる。

以下では，各々の立体について，$(*)$が成り立つことを証明する。

(1) 立体が円柱の場合（アルキメデスによるものとして有名）



内接球の半径が r であるから，

$S_1 = 2\cdot\pi r^2 + 2\pi r\cdot 2r = 6\pi r^2$

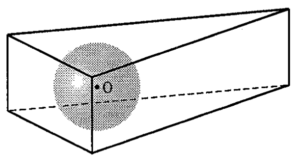
$V_1 = \pi r^2\cdot 2r = 2\pi r^3$

よって，$V_1 = \frac{1}{3}S_1 r$ が成り立つ。

（なお，このとき，$S_1 : S_2 = 6\pi r^2 : 4\pi r^2 = 3 : 2$ である。）

(2) 立体が角柱の場合

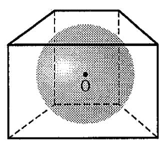
（例1）　三角柱



内接する球の中心Oと三角柱の6つの頂点を結ぶと，三角柱の体積は，2つの三角錐と3つの四角錐の体積の和に等しく，それらの角錐の高さは，内接球の半径 r に等しいから，

$V_1 = \frac{1}{3}S_1 r$ が成り立つ。

（例2）　四角柱



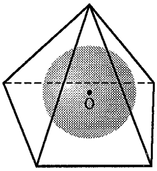
内接する球の中心Oと四角柱の8つの頂点を結ぶと，四角柱の体積は，6つの四角錐の体積の和に等しく，それらの角錐の高さは内接球の

半径 r に等しいから，$V_1=\frac{1}{3}S_1 r$ が成り立つ。

(例１)(例２)と同様にして，一般に n 角柱について(＊)が成り立つ。

⑶ 立体が角錐の場合

(例) 四角錐



内接する球の中心Oと四角錐の５つの頂点を結ぶと，四角錐の体積は，４つの三角錐と１つの四角錐の体積の和に等しく，それらの角錐の高さは，内接球の半径 r に等しいから，

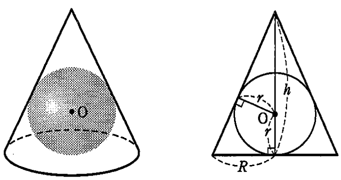
$V_1=\frac{1}{3}S_1 r$ が成り立つ。

この(例)と同様にして，一般に n 角錐について(＊)が成り立つ。

⑷ 立体が一般の多面体の場合

⑵，⑶の例と同様に，内接する球の中心Oと多面体の各頂点を結び，多面体の体積をいくつかの角錐の体積の和として考えれば，(＊)が成り立つ。

⑸ 立体が円錐の場合



円錐の底面の半径を R，高さを h とすると，

$$S_1=\pi R^2+\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot\sqrt{R^2+h^2}$$
$$=\pi R^2+\pi R\sqrt{R^2+h^2}$$
$$V_1=\frac{1}{3}\pi R^2 h$$

ここで，円錐の内接球の中心を通り，底面に垂直な平面による切り口(右図)において，２つの直角三角形の相似から，

$\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{R}=\frac{h-r}{r}$ より，$\sqrt{R^2+h^2}=R\left(\frac{h}{r}-1\right)$

よって，$S_1=\pi R^2+\pi R\cdot R\left(\frac{h}{r}-1\right)=\frac{\pi R^2 h}{r}$

ゆえに，$V_1=\frac{1}{3}S_1 r$ が成り立つ。

なお，円錐を正 n 角錐の $n\to\infty$ のときの極限として考えれば，円錐の場合は⑶からもわかる。(同様に，⑴の円柱の場合も，円柱を正 n 角柱の $n\to\infty$ のときの極限として考えれば，⑵からもわかる。)

以上⑴〜⑸により，定理が証明された。■

なお，**定理**およびその証明において，球の半径 r を固定して考えれば，ただちに次の**系**が成り立つことがわかる。

> **系**　半径 r_0 の球が内接するどんな立体(ただし，角柱，角錐をはじめとする多面体，直円柱，直円錐)についても，その表面積 S と体積 V の比は常に一定で，$S:V=3:r_0$ である。

この**系**から，半径３の球が内接するどんな立体も，表面積と体積の値が等しいことになる。

§3. 考　察

§２の**定理**について，いくつかの考察を述べることにする。

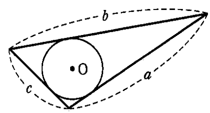
⑴　立体が円柱の場合には，

$$S_1:S_2=V_1:V_2=3:2$$

であったが，他の図形の場合には必ずしも３：２になるとは限らない。

(例)　三角柱の場合

⑵(例１)の三角柱において，底面の三角形の３つの辺の長さを a，b，c とすると，内接球の中心Oを通り，底面に平行な平面による切り口(下図)を考えれば，底面積が $\frac{1}{2}(a+b+c)r$ で表されるから，



三角柱の表面積 S_1 は，

$$S_1=(a+b+c)\cdot 2r+2\cdot\frac{1}{2}(a+b+c)r$$
$$=3(a+b+c)r=6sr\ (ただし，2s=a+b+c)$$

となり，$S_1:S_2=6sr:4\pi r^2=3s:2\pi r$ である。

ここで，ヘロンの公式から，

$$\frac{1}{2}(a+b+c)r=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

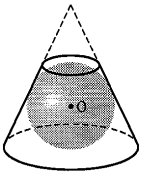
であるから，$r=\dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

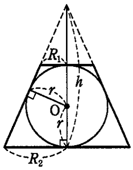
よって，

$$S_1:S_2=3:2\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}\pi$$

ゆえに，$S_1:S_2=3:2$ にはならない。

(2) 立体が直円錐台の場合にも，$S_1:S_2=V_1:V_2$ が成り立つことが，次のようにしてわかる。



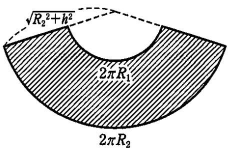


直円錐台の上底面，下底面の円の半径をそれぞれ R_1，R_2 とし，直円錐台の側面を上方に延ばして直円錐にしたときの高さを h とする。

内接球の中心を通り，底面に垂直な平面による切り口(右図)において，２つの直角三角形の相似から，

$$\frac{\sqrt{R_2{}^2+h^2}}{R_2}=\frac{h-r}{r}\quad\cdots\cdots①$$

したがって，直円錐台の表面積 S_1 は，下図(側面の展開図)も参考にすれば，



$$S_1=\pi(R_1{}^2+R_2{}^2)+\frac{1}{2}\cdot2\pi R_2\cdot\sqrt{R_2{}^2+h^2}\cdot\left(1-\frac{R_1{}^2}{R_2{}^2}\right)$$

$$=\pi(R_1{}^2+R_2{}^2)+\pi R_2{}^2\left(\frac{h}{r}-1\right)\left(1-\frac{R_1{}^2}{R_2{}^2}\right)(\because ①より)$$

$$=\pi(R_1{}^2+R_2{}^2)+\left(\frac{h}{r}-1\right)(\pi R_2{}^2-\pi R_1{}^2)$$

$$=2\pi R_1{}^2+\frac{h}{r}(\pi R_2{}^2-\pi R_1{}^2)$$

$$=\pi R_2{}^2\frac{h}{r}-\pi R_1{}^2\frac{h-2r}{r}$$

また，直円錐台の体積 V_1 は，

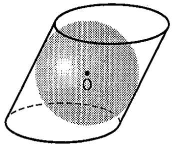
$$V_1=\frac{1}{3}\pi R_2{}^2h-\frac{1}{3}\pi R_1{}^2(h-2r)$$

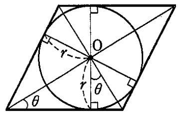
よって，$V_1=\dfrac{1}{3}S_1r$ となるから，

$S_1:S_2=V_1:V_2$ が成り立つ。

なお，直円錐台に収束するような，球が内接できる多面体の列を考えて，**定理**を用いて示すこともできる。

(3) 直円柱でない円柱の場合については，**定理**の関係式が成り立たないことが次のようにしてわかる。





まず，この場合の内接球は，円柱の側面とは２点でしか接していない。この２点と球の中心を通り，底面に垂直な平面による円柱の切り口(上右図)は平行四辺形になるが，円が内接できる平行四辺形はひし形に限るから，切り口は高さが $2r$ のひし形である。

このひし形の内角の一つを 2θ とすると，ひし形の一辺の長さは，$r\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)$ となるから，これを簡単のため $rf(\theta)$ とおくと，この円柱の表面積 S_1 と体積 V_1 は，次のようになる。

$$S_1=2\pi\left\{\frac{1}{2}rf(\theta)\right\}^2+\pi rf(\theta)\cdot2r$$

$$=\pi r^2\left[\frac{1}{2}\left\{f(\theta)\right\}^2+2f(\theta)\right]$$

$$V_1=\pi\left\{\frac{1}{2}rf(\theta)\right\}^2\cdot2r=\frac{1}{2}\left\{f(\theta)\right\}^2\pi r^3$$

よって，

$$S_1:V_1=\left\{\frac{1}{2}f(\theta)+2\right\}:\frac{1}{2}f(\theta)r$$

$$=\left(1+\frac{4}{f(\theta)}\right):r\neq1:\frac{r}{3}\quad\cdots\cdots②$$

となって，$V_1\neq\dfrac{1}{3}S_1r$ となるから，

$S_1:S_2=V_1:V_2$ は一般に成り立たない。

ちなみに，$S_1:S_2=V_1:V_2$ が成り立つのは，②より，$f(\theta)=2$ のとき，すなわち $\theta=45°$ のときに限る。このときは，直円柱の場合であ

る。

また，直円錐でない円錐の場合についても，円柱の場合と同様に，内接球は円錐の側面と 2 点でしか接しないため，**定理**の関係式は成り立たない。

(4) 2 次元平面の多角形と，それに内接する円についても，§2 の**定理**と同様の関係が成り立つ。

すなわち，円が内接可能な多角形の周の長さと面積をそれぞれ l_1，S_1，内接円の周の長さと面積をそれぞれ l_2，S_2 とするとき，
$l_1 : l_2 = S_1 : S_2$ が成り立つ。

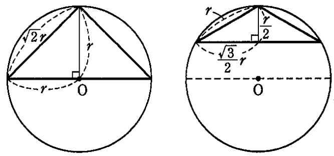
証明は，$l_2 : S_2 = 2\pi r : \pi r^2 = 1 : \dfrac{r}{2}$ であることから，$l_1 : S_1 = 1 : \dfrac{r}{2}$　すなわち　$S_1 = \dfrac{1}{2}l_1 r$ を示せば，$l_1 : S_1 = l_2 : S_2$ からわかる。

$S_1 = \dfrac{1}{2}l_1 r$ の証明は，内接円の中心と，多角形の各頂点を結び，多角形の面積をいくつかの三角形の面積の和として考えればよい。

当然ながら，§2 の系と同様の関係も成り立つ。すなわち，半径 r_0 の円が内接するどんな多角形についても，その周の長さ l と面積 S の比は常に一定で，$l : S = 2 : r_0$ である。

(5) 蛇足であるが，§2 の系に対して，半径 r_0 の球に内接する立体については，その表面積 S と体積 V の比は常に一定ではない。

(例) 半径 r の球に内接する高さ r の直円錐（表面積 S，体積 V とする）と，高さ $\dfrac{r}{2}$ の直円錐（表面積 S'，体積 V' とする）について，球の中心を通り，直円錐の底面に垂直な平面による切り口の図（下図）から，それぞれの表面積，体積は次のようになる。



高さ r の直円錐　　　高さ $\dfrac{r}{2}$ の直円錐

$$S = \pi r^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi r \cdot \sqrt{2}\,r = (1+\sqrt{2})\pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$$

よって，$S : V = (1+\sqrt{2}) : \dfrac{r}{3}$

$$S' = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\frac{\sqrt{3}}{2}r\cdot r$$
$$= \frac{3+2\sqrt{3}}{4}\pi r^2$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2\cdot\frac{r}{2} = \frac{1}{8}\pi r^3$$

よって，$S' : V' = 2(3+2\sqrt{3}) : r$

ゆえに，$S : V \neq S' : V'$ となり，表面積と体積の比は一定ではない。

実は，もっと簡単には，図の 2 つの直円錐に内接する球の大きさ（半径）が明らかに異なることから，§2 の系を用いれば，
$S : V \neq S' : V'$ であることが容易にわかる。

（東京都立国立高等学校）