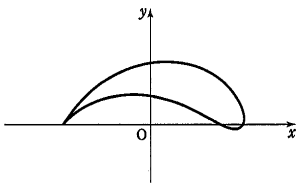
ジュウコフスキイ(Joukowski)の翼形

いしはま　ふみたけ
石濱　文武



(図１)

§1　はじめに

本稿では数学(複素平面)，物理(流体力学)，そして情報の３教科に関係する題材を提供します。総合学習の題材として高校生にも理解できることを考慮にいれてあります。

複素平面で写像の問題が扱われています。

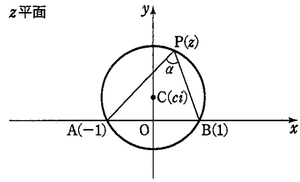
「複素平面上で，点 z が平面図形 F 上を動くとき，$w=f(z)$ で定まる点 w の描く平面図形 F' を調べよ」というタイプの問題です。本稿では，

$$w=f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad (1.1)$$

という比較的シンプルな形の写像が，古典的流体力学(航空力学)で有用な写像であることを念頭におきながら，ジュウコフスキイ(Joukowski)の翼形を描くための基本的な事項を調べます。

§2　ある円の像

ここでは，点 z が z 平面上で，実軸上の２点 -1，1 を通る円周 F (中心は虚軸上にくるので，中心を ci とし $c>0$ とします)上を動くものとします。なお，複素数 z の表す点がPであることを $\mathrm{P}(z)$ と表します。



(図２)

このとき，変換(1.1)で定まる点 $\mathrm{P}'(w)$ の軌跡 F' を求めます。

まず，**変換(1.1)の不動点**を求めます。不動点とは変換によって動かない点のことです。すなわち

$$f(z)=z$$

を満たす点 z のことです。

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=z$$

より

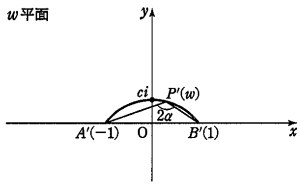
$$z=\frac{1}{z},\quad z^2=1,\quad z=\pm 1$$

となりますから，変換(1.1)の不動点は実軸上の２点 -1，1 です。すなわち，変換(1.1)は２個の不動点をもつ変換です。この２点は z の軌跡 F 上の点ですから，z の像 w も w 平面上の２点 $\mathrm{A}'(-1)$，$\mathrm{B}'(1)$ を通ることになります。

次に，円の性質「定点からの距離が一定である」を使うと z の方程式は

$$|z-ci|=\sqrt{1+c^2}$$

となりますが，この場合これを使って w の軌跡 F' を求めようとすると計算が複雑になります。ここでは円の性質「２定点から見込む角が一定である」を使います。



(図 3)

$$\angle \mathrm{A'P'B'}=\arg\frac{w-1}{w+1}$$

ここで

$$\frac{w-1}{w+1}=\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}=\frac{z^2-2z+1}{z^2+2z+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

なので

$$\angle \mathrm{A'P'B'}=\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2=2\arg\frac{z-1}{z+1}$$

ここで，z は 2 点 -1，1 を通る円周上の点だから(図 2 参照)

$$\angle \mathrm{APB}=\arg\frac{z-1}{z+1}=\alpha=\text{一定}$$

とおけて

$$\angle \mathrm{A'P'B'}=2\angle \mathrm{APB}=2\alpha=\text{一定}$$

を得ます。すなわち，w 平面上で 2 定点 A′，B′ から動点 P′ を見込む角は一定であることが分かります。点 w は 2 点 A′，B′ を通る円弧の上にあるわけです。

詳細に調べると，z の軌跡 F のうち優弧 AB (図 2 の円周の場合実軸より上の部分) の像は図 3 の円弧になり，z の軌跡のうち劣弧 AB (図 2 の実軸より下の部分) の像も図 3 の円弧になることが分かります。(等式 ∠A′P′B′=2∠APB から，弧 APB が劣弧のときも像 P′ は図 3 の弧上にくる) すなわち像には重複点があるわけです。しかも，

∠A′P′B′=2∠APB= (図 2 で弧 AB の中心角)

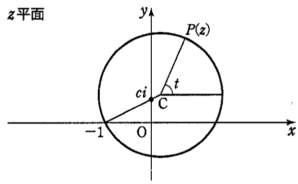
より，図 3 の弧は点 ci を通ります。

§3　ジュウコフスキイの翼形

この節では，点 z が

§2 の円 F と少しだけずれたある円　　(3.1)

の円周上を動くときの変換 (1.1) による点 w の軌跡を調べます。正確には，円 (3.1) の中心 C は 2 点 -1，ci を結ぶ直線上にあって，点 ci に近い点とし，この円は点 -1 を通るとします。



(図 4)

このとき，w の軌跡は§2 で示した円弧を少しずらした図形になりますが，優弧と劣弧の像は重ならないので，ある閉曲線を描きます。それがジュウコフスキイの翼形 (図 1) です。図 4 の円が変換 (1.1) によってどのように図 1 に移るかをやや詳しく検討してみます。点 z の軌跡を図 2 から図 4 に替えたことにより ∠APB が小さくなるのにしたがって ∠A′P′B′ が小さくなります。したがって図 4 の優弧 (実軸より上の部分) は図 3 の円弧よりも上に移り，図 4 の劣弧 (実軸より下の部分) は図 3 の円弧よりも下に移ることになり w の像は図 3 から図 1 に変化するわけです。

ジュウコフスキイの翼形をコンピュータソフトを使って xy 実平面上に描くために，w の軌跡の方程式をパラメータ表示します。まず，

$z=x+iy$, $w=u+iv$　(x，y，u，v は実数)

とおいて，

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

に代入すると

$$u+iv=\frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{1}{x+iy}\right)$$
$$=\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\frac{y}{2}\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)i$$

より

$$u=\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$
$$v=\frac{y}{2}\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad (3.2)$$

を得ます。

2 点 -1，ci を結ぶ線分を $m:1\,(m>1)$ に外分する点を P(z) が動く円の中心 C とし，動径 CP の x 軸の正の方向からの偏角を t とすると

$$\text{中心}\quad \mathrm{C}\left(\frac{1}{m-1},\ \frac{mc}{m-1}\right)$$

$$\text{半径}\quad r=\frac{m}{m-1}\sqrt{1+c^2}$$

となるので

$$x=\frac{1}{m-1}(1+m\sqrt{1+c^2}\cos t)$$

$$y=\frac{1}{m-1}(mc+m\sqrt{1+c^2}\sin t) \qquad (3.3)$$

となります。

(3.3) を (3.2) に代入して，u を $x(t)$，v を $y(t)$ と書き換えれば

$$x(t)=\frac{1+m\sqrt{1+c^2}\cos t}{2(m-1)}\left(1+\frac{(m-1)^2}{R}\right)$$

$$y(t)=\frac{mc+m\sqrt{1+c^2}\sin t}{2(m-1)}\left(1-\frac{(m-1)^2}{R}\right) \quad (3.4)$$

ただし，

$R=1+m^2(1+2c^2)+2m\sqrt{1+c^2}(\cos t+mc\sin t)$

となります。

例として，$c=\frac{1}{2}$，$m=6$ を代入すれば

$$x(t)=\frac{1}{10}(1+3\sqrt{5}\cos t)\left(1+\frac{25}{55+6\sqrt{5}(\cos t+3\sin t)}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{10}(3+3\sqrt{5}\sin t)\left(1-\frac{25}{55+6\sqrt{5}(\cos t+3\sin t)}\right) \quad (3.5)$$

を得ます。

これをコンピュータソフト（本稿では数研出版 *Studyaid* D.B.）を使って描いたものが冒頭のグラフ（図１）です。

§4　おわりに

下記の参考文献には，本稿で取り上げたことに関しては簡単に結果のみが記載されています。本稿に記した数学的処理はすべて筆者が独自に追究したものです。

《参考文献》

1)　函数論入門　一松信　培風館　1957

2)　なっとくする流体力学　木田重雄　講談社　2003

（神奈川県立湘南高等学校）