パスカルの三角形の拡張

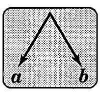
井上（いのうえ）　具規（ともき）

§0　はじめに

パスカルの三角形は，$(a+b)^n$ を展開するときに大変便利なものである。a, b 2変数に対する展開から，多変数に対する展開に拡張する際の立体図を構成するのが，今回のねらいである。

§1　$(a+b)^n$ の展開

まずは一般的なパスカルの三角形の構造を考えよう。一番左の図を基本図と呼ぶ。



1	1	$n=0$
1　1	a　b	$n=1$
1　2　1	a^2　ab　b^2	$n=2$
1　3　3　1	a^3　a^2b　ab^2　b^3	$n=3$

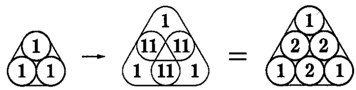
変数は，この基本図にしたがって，左下に行くときは a が増え，右下に行くときは b が増えている。係数は2段目の1 1という組が，それぞれ基本図の方向にずれて重なって加えられ，3段目が作られている。つまり，$\boxed{1\ 1}$ $\boxed{1\ 1}$ から $\boxed{1\ 2\ 1}$。

§2　$(a+b+c)^n$ の展開

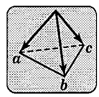
$(a+b+c)^n$ の展開を考える。(図2−1) の基本図に沿って，係数の立体図 (図2−2) をつくる。この立体図では，下段の数が，上段から伸びてきている線の和となっている。構造を見やすくするために縦の線を省略した図 (図2−4) を用意した。この図で，中央の数6は，前段の数からの和2+2+2から作られていることが読み取れる ((図2−3) 参照)。

(図2−4) を各段ごとに切り出し，真上から見た様子を (図2−7) に示した。このとき基本図 (図2−1) も，真上から見た形となり，ちょうど (図2−5) のようになることに注意しよう。

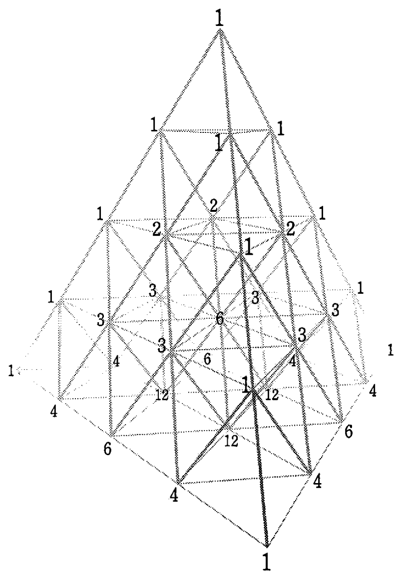
$n=1$ の段から $n=2$ の段が基本図の方向にずれて，次のように作られる。すなわち，前の段の三角形が基本図の方向にずれて重なって足される。



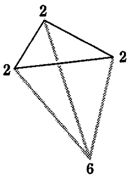
$n=3$ の段では，等式 (式1) と求められる (図2−6)。



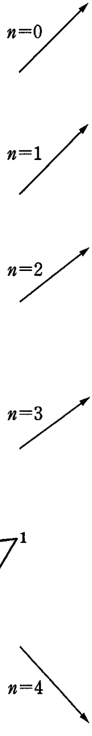
基本図 (図2−1)



立体図 (図2−2)



(図2−3)



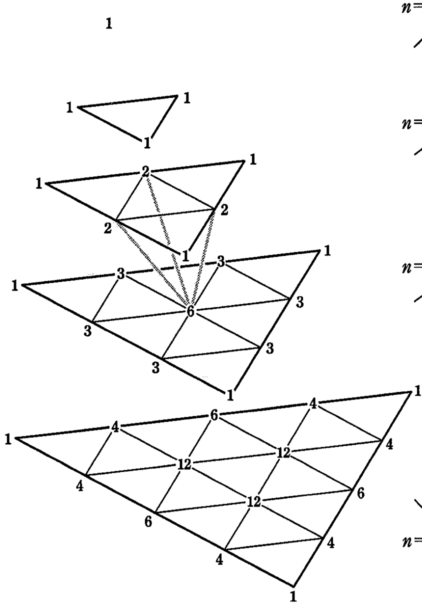
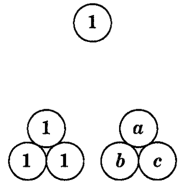
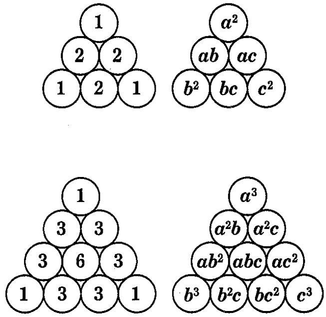


図2−2の縦線を除去した図 (図2−4)



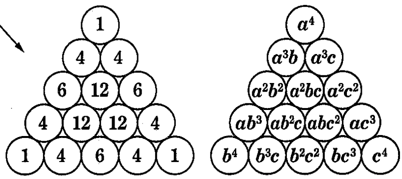
(図2−5)



(図2−6)

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^3 = a^3 & \\
&+3a^2b+3a^2c \\
&+3ab^2+6abc+3ac^2 \\
&+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3
\end{aligned}
$$

(式1)



(図2−7)
各段を切り出した図

§3　$(a+b+c+d)^n$ の展開

a から d までの 4 変数を考えるため基本図は，(図 3−1) のようになる。ここからは，係数と変数を同時に記載している。それぞれ独立して考えて欲しい。n を増やしていくために次のような手法をとる。

$n=0$ は，$(a+b+c+d)^0=1$ であるから，1 から始まることは変わらない。この最初の 1 を球の中に入れて，基本図の 4 方向に進み，$n=1$ の図となる。ここで得られた $1a$〜$1d$ を今度は (図 3−2) の球の中に入れて，基本図の方向に進み，$n=2$ の展開の立体が完成される。このように，前の段の結果を球の中に入れて，外へ外へと立体を膨らませていく。

係数と変数の関係を見よう。(図 3−2) 図中の $2ab$ を例にとって説明する。$2ab$ は，球の中に入っている $1a$ と $1b$ から来ており，係数は $1+1=2$ と求められ，変数 $1a$ から b 方向に伸びたので ab となった ($1b$ から a 方向に伸びたので ab としてもよい) と理解できる。

よって，$n=2$ の段では，

$$(a+b+c+d)^2=1a^2+2ab+2ac+2ad+1b^2 +2bc+2bd+1c^2+2cd+1d^2$$

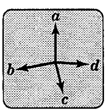
と求められる (図 3−2)，(式 2)

$n=3$ の段でも見てみると，(図 3−3) の $3a^2b$ は，$1a^2$ と $2ab$ から係数は $1+2=3$，変数は $1a^2$ から b 方向に伸びたので a^2b (または，$2ab$ から a 方向に伸び a^2b) となったと考えられる。

よって，$n=3$ の段では

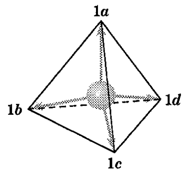
$$(a+b+c+d)^3=1a^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d +3ab^2+6abc+6abd+3ac^2+6acd+3ad^2 +1b^3+3b^2c+3b^2d+3bc^2+6bcd+3bd^2 +1c^3+3c^2d+3cd^2+1d^3$$

となる (図 3−3)。

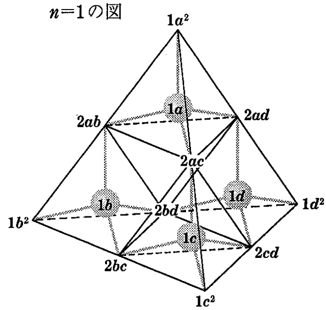


基本図 (図 3−1)

$n=0$



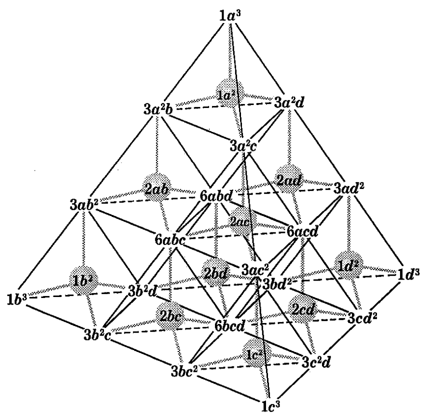
$n=1$ の図



$n=2$ の展開立体図 (図 3−2)

$$\boxed{\begin{aligned}&(a+b+c+d)^2=1a^2\\&\quad+2ab+2ac+2ad\\&\quad+1b^2+2bc+2bd+1c^2+2cd+1d^2\end{aligned}}$$

(式 2)

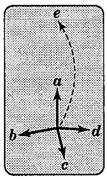


$n=3$ の展開立体図 (図 3−3)

§4　$(a+b+c+d+e)^n$ の展開

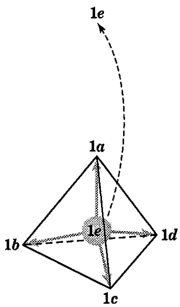
この先は，文字の増やし方に注意すればどこまででも拡張することができる。a から e までの 5 変数を記載するため，基本図は (図 4−1) のようにして，上下に立体を分けることで，4 次元以上の方向へ立体を拡大していくことを可能にしている。

(図4−2) では，$1e^2$ を 1 段目として上下に 3 つの立体として表現される。上の段にいくと e が増えていくことが読みとれる。また，3 段目の立体が (図 3−2) と同じであることにも注意したい。



基本図(図 4−1)

$n=0$



$n=1$ の展開立体図

$(a+b+c+d+e)^3$ の a^2b の係数を求める方法としては，$\dfrac{3!}{2!1!0!0!0!}a^2b=3a^2b$　や

$\dfrac{3!}{1!1!0!1!0!}abd=6abd$　等

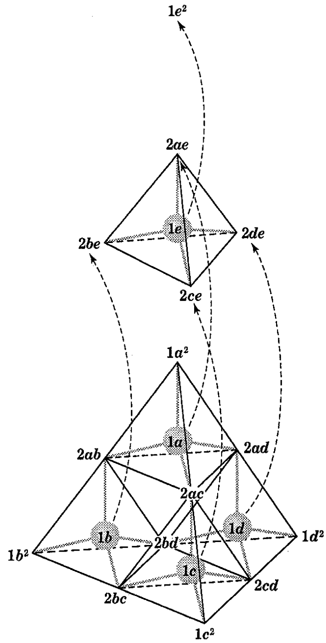
とするのが一般的で，$(a+b+c+d+e+f)^7$ の係数ならば $\dfrac{7!}{0!3!2!0!0!2!}b^3c^2f^2=210b^3c^2f^2$

である。もっと一般的には，展開公式は，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$$

$$=\sum_{\substack{k_1+k_2\\+\cdots+k_m=n}}\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!}a_1{}^{k_1}a_2{}^{k_2}\cdots a_m{}^{k_m}$$

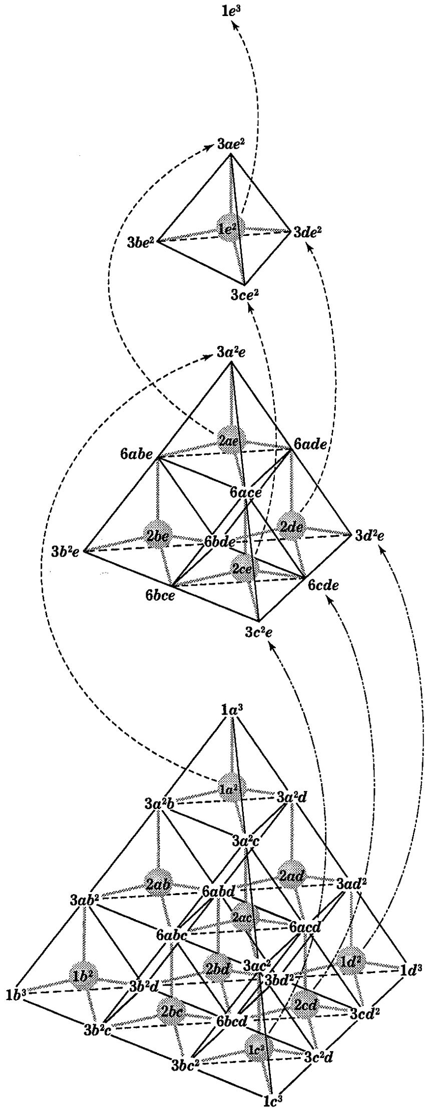
となることを付け加えておく。



$n=2$ の展開立体図 (図 4−2)

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d+e)^2 &= 1e^2+2ae+2be+2ce+2de\\
&\quad+1a^2+2ab+2ac+2ad\\
&\quad+1b^2+2bc+1c^2\\
&\quad+2bd+2cd+1d^2
\end{aligned}
$$

(式 3)



n=3の展開立体図 (図 4−3)
(一部矢印を省略している。右上はその展開式)

$$
\boxed{\begin{aligned}
(a+b+c+d+e)^3 &= 1e^3+3ae^2+3be^2+3ce^2+3de^2 \\
&+3a^2e+6abe+6ace+6ade+3b^2e+6bce+3c^2e+6bde \\
&+6cde+3d^2e+1a^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3ab^2+6abc \\
&+3ac^2+6abd+6acd+3ad^2+1b^3+3b^2c+3bc^2+1c^3 \\
&+3b^2d+6bcd+3c^2d+3bd^2+3cd^2+1d^3
\end{aligned}}
$$

(式 4)

最後に，この理論を考えるにあたって，最後まで付き合ってくれた松尾昭夫君に感謝します。

(岩手県立花巻北高等学校)
(前 北海道立根室高等学校)