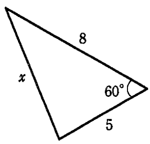
$z^2=x^2+y^2\pm xy$ の自然数解

君島（きみじま） 巖（いわお）

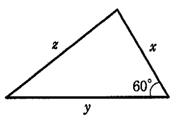
前任校でのことである。数学Ｉの余弦定理をやっていた時，Ｓ先生が教科書の例題（下図）を示して，「一つの角が $60°$ の三角形ではこのほかにも自然数解があるのでしょうかね」と話しかけてきた。



$x=7$

「そうですね，そういう問題は存在しますね。」と言って，その夜，考察をすすめた。

§1．１つの角が $60°$ の三角形の辺の長さが自然数となるもの



余弦定理により

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 60°$$
$$=x^2+y^2-xy \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$\begin{cases} x=z-\alpha \\ y=z-\beta \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$

とおき，①に代入すると

$$z^2=(z-\alpha)^2+(z-\beta)^2-(z-\alpha)(z-\beta)$$

これを z について解くと

$$z=\alpha+\beta-\frac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta} \quad \cdots\cdots ③$$

Ａ型…分母を１にする。

(1) $\alpha=2$，$\beta=-1$ のとき
③，②により
$x=5$，$y=8$，$z=7$

(2) $\alpha=3$，$\beta=-2$
$x=16$，$y=21$，$z=19$

(3) $\alpha=4$，$\beta=-3$
$x=33$，$y=40$，$z=37$

(4) $\alpha=5$，$\beta=-4$
$x=56$，$y=65$，$z=61$

(5) $\alpha=6$，$\beta=-5$
$x=85$，$y=96$，$z=91$

一般に　$\alpha=k+1$，$\beta=-k$ とすると
③，②により

$$x=3k^2+2k$$
$$y=3k^2+4k+1$$
$$z=3k^2+3k+1$$

ここで $k=2$，3，4，5 …… と代入すると x，y，z の組が一つずつ対応するので，
①の自然数解が無限に存在する。

Ｂ型……分母を３にする。

(1) $\alpha=4$，$\beta=-1$
$x=3$，$y=8$，$z=7$

(2) $\alpha=5$，$\beta=-2$
$x=8$，$y=15$，$z=13$

(3) $\alpha=6$，$\beta=-3$
$x=15$，$y=24$，$z=21$
これはＡ型の(1)の３倍である。

(4) $\alpha=7$，$\beta=-4$
$x=24$，$y=35$，$z=31$

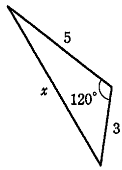
(5) $\alpha=8$，$\beta=-5$
$x=35$，$y=48$，$z=43$

一般に $\alpha=k+3$，$\beta=-k$ とすると
③，②により

$$x=k^2+2k$$
$$y=k^2+4k+3$$
$$z=k^2+3k+3$$

§2．1つの角が120°の三角形の辺の長さが自然数であるもの

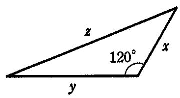
次の日のことである。考察の結果を話したら120°の場合はどうでしょうかという。



$x=7$

上のは，練習問題に出ている。

120°の場合について§1と同様に考えてみる。



$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 120°$$
$$=x^2+y^2+xy \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$\begin{cases} x=z-\alpha \\ y=\beta-z \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$

とおき，②を①に代入して，整理すると

$$\begin{cases} x=\beta-\dfrac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta} \\ y=-\alpha+\dfrac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta} \\ z=\alpha+\beta-\dfrac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta} \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

x，y，zは自然数なので

$$\beta-\frac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta}>0,\quad -\alpha+\frac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta}>0,\quad \alpha+\beta-\frac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta}>0$$

$\alpha+\beta>0$ とすると

$$\beta^2-2\alpha\beta>0,\quad -\alpha^2+2\alpha\beta>0,\quad \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2>0$$

ここで $\beta>0$ とすると $0<2\alpha<\beta$ となる。

これを考えながらいくつか例を示す。

(1) $\alpha=1$，$\beta=3$ のとき

$x=\frac{3}{4}$，$y=\frac{5}{4}$，$z=\frac{7}{4}$

整数解は $x=3$，$y=5$，$z=7$

(2) $\alpha=1$，$\beta=4$

$x=8$，$y=7$，$z=13$

(3) $\alpha=1$，$\beta=5$

$x=5$，$y=3$，$z=7$

(4) $\alpha=1$，$\beta=6$

$x=24$，$y=11$，$z=31$

………

120°の場合の考察は部分的であるがそれでも，120°の場合も無限の解が存在する。

§3．考　察

数研通信No. 16においても次のピタゴラス数の統一式を紹介した。

> ピタゴラス数の統一式
>
> α，β，m，x，y，zが自然数のとき
>
> $$\left.\begin{array}{l} x=\beta+2m \\ y=\alpha+2m \\ z=\alpha+\beta+2m \end{array}\right\}$$
>
> ただし　$\alpha\beta=2m^2$
>
> は $x^2+y^2=z^2$ のすべての自然数解を与える。

このときも $x=z-\alpha$，$y=z-\beta$ と置いて公式を導いた。すると，次のように言えるだろう。

> $z^2=x^2+y^2+Axy$　$(A=0,\ 1,\ -1)$で
>
> $x=z-\alpha$，$y=z-\beta$
>
> と置く手法は極めて有効である。

《参考文献》

新数学Ⅰ　知研出版

（栃木県立那須清峰高等学校）