数列の和を積分で考える

片岡(かたおか)　宏信(ひろのぶ)

§1　はじめに

これまでにも $\sum k^l$ の求め方についての様々な考察がなされて来たが，私は積分を使うことにより，数列の和の公式を導くことを考えた。

§2　$\sum k^l$ の和

n を自然数として

$$S_n=\int_0^n x\,dx,\quad a_n=\int_{n-1}^n x\,dx \tag{1}$$

とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n^2,\quad a_n=\frac{1}{2}(2n-1)$$

となる。ここで，

$$S_n=\sum_{k=1}^n a_k$$

であるから，

$$\frac{1}{2}n^2=\sum_{k=1}^n\frac{1}{2}(2k-1)$$

となる。これより，

$$\sum_{k=1}^n k=\frac{1}{2}n(n+1) \tag{2}$$

を求める事ができる。このような方法で，より一般的な公式を求める。l を自然数として

$$S_n=\int_0^n x^l dx,\quad a_n=\int_{n-1}^n x^l dx \tag{3}$$

とすると

$$S_n=\frac{1}{l+1}n^{l+1},$$

$$a_n=\frac{1}{l+1}n^{l+1}-\frac{1}{l+1}(n-1)^{l+1}$$

$$=\frac{1}{l+1}\sum_{r=0}^{l}{}_{l+1}\mathrm{C}_r\,n^r(-1)^{l-r}$$

となる。ここで，$S_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$ より，

$$\frac{1}{l+1}n^{l+1}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{l+1}\sum_{r=0}^{l}{}_{l+1}\mathrm{C}_r\,k^r(-1)^{l-r}$$

となる。これより，

$$\sum_{r=0}^{l}(-1)^{l-r}{}_{l+1}\mathrm{C}_r\sum_{k=1}^n k^r=n^{l+1}$$

ここで $l=0,\ 1,\ 2,\ 3$ のときそれぞれ

$$\sum_{k=1}^n 1=n,$$

$$\sum_{k=1}^n(2k-1)=n^2,$$

$$\sum_{k=1}^n(3k^2-3k+1)=n^3,$$

$$\sum_{k=1}^n(4k^3-6k^2+4k-1)=n^4 \tag{4}$$

となる。ここで，(4)を解きなおすと，

$$\sum_{k=1}^n k=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\sum_{k=1}^n k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^n k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \tag{5}$$

が計算できる。さらに $l=4,\ 5$ の場合も考えると $\sum k^4$，$\sum k^5$ 等も順次求まっていく。

§3　$\sum k^{-l}$ の和

この方法を使って，さらにいろいろな式の和を考えたい。

$$S_n=\int_1^n\frac{1}{x}dx=\log n,$$

$$a_n=\int_{n-1}^n\frac{1}{x}dx=\log\frac{n}{n-1}$$

であるから，$\sum\limits_{k=2}^n\log\frac{k}{k-1}=\log n$ よって

$$\sum_{k=1}^n\log\frac{k+1}{k}=\log(n+1)$$

がでてくる。分数関数である事を考慮して S_n の積分の範囲を1から n にした。さらに，

$$S_n=\int_1^n\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{n}+1,$$

$$a_n=\int_{n-1}^n\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{n(n-1)}$$

より，$n\geqq 2$ で $\sum\limits_{k=2}^n\frac{1}{k(k-1)}=1-\frac{1}{n}$

よって $$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1} \tag{6}$$

が出てくる。さらに，$l \neq 1$ のとき

$$S_n=\int_1^n x^{-l}dx=\frac{1}{-l+1}\left\{\frac{1}{n^{l-1}}-1\right\},$$

$$a_n=\int_{n-1}^n x^{-l}dx=\frac{1}{-l+1}\left\{\frac{1}{n^{l-1}}-\frac{1}{(n-1)^{l-1}}\right\}$$

より，$\dfrac{1}{n^{l-1}}-1=\sum_{k=2}^{n}\left\{\dfrac{1}{k^{l-1}}-\dfrac{1}{(k-1)^{l-1}}\right\}$

したがって，

$$\frac{1}{(n+1)^{l-1}}-1=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+1)^{l-1}}-\frac{1}{k^{l-1}}\right\} \tag{7}$$

§4　$\sum k^l r^k$ の和

$r \neq 1$ のとき

$$S_n=\int_0^n r^x dx=\frac{1}{\log r}(r^n-1),$$

$$a_n=\int_{n-1}^n r^x dx=\frac{r-1}{\log r}r^{n-1}$$

とすると，

$$\frac{1}{\log r}(r^n-1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{r-1}{\log r}r^{k-1}$$

であり，これより等比数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=\frac{r^n-1}{r-1} \tag{8}$$

が出てくる。さらに，

$$S_n=\int_0^n xr^{x-1}dx=\frac{1}{r\log r}\left(nr^n-\frac{r^n}{\log r}+\frac{1}{\log r}\right),$$

$$a_n=\int_{n-1}^n xr^{x-1}dx$$

$$=\frac{1}{r\log r}\left\{nr^n-(n-1)r^{n-1}-\frac{r^n}{\log r}+\frac{r^{n-1}}{\log r}\right\}$$

より

$$nr^n-\frac{r^n}{\log r}+\frac{1}{\log r}$$

$$=(r-1)\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}+\left(1-\frac{r-1}{\log r}\right)\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}=\frac{nr^{n+1}-(n+1)r^n+1}{(r-1)^2} \tag{9}$$

を導ける。これは，等比数列と等差数列の積の和の公式である。

さらに一般的にすると

$$S_n=\int_0^n x^l r^{x-1}dx$$

$$=\left[\frac{1}{\log r}x^l r^{x-1}\right]_0^n-\int_0^n\frac{l}{\log r}x^{l-1}r^{x-1}dx,$$

$$a_n=\int_{n-1}^n x^l r^{x-1}dx$$

$$=\left[\frac{1}{\log r}x^l r^{x-1}\right]_{n-1}^n-\int_{n-1}^n\frac{l}{\log r}x^{l-1}r^{x-1}dx$$

より

$$\left[x^l r^x\right]_0^n=\sum_{k=1}^{n}\left[x^l r^x\right]_{k-1}^k$$

これより　$l=0$ で，$r^n-1=(r-1)\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}$

$l \neq 0$ で，$r^n n^l=\sum_{k=1}^{n}\left[x^l r^x\right]_{k-1}^k$

これを解いて，$l=0$ で，

$$\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}=\frac{r^n-1}{r-1}$$

これは(8)である。$l \neq 0$ で，

$$\sum_{k=1}^{n}k^l r^{k-1}$$

$$=\frac{1}{r-1}\left\{r^n n^l+\sum_{p=0}^{l-1}{}_l\mathrm{C}_p(-1)^{l-p}\left(\sum_{k=1}^{n}k^p r^{k-1}\right)\right\}$$

この式を使って $l=1$ より順次計算していける。$l=1$ の場合は(9)である。$l=2$ のときは，

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 r^{k-1}=\frac{1}{r-1}\left(r^n n^2+2\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-2\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}\right)$$

$$=\frac{r}{(r-1)^3}\left\{r^{n+1}n^2+r^n(-2n^2-2n+2)\right.$$

$$\left.+r^{n-1}(n^2+2n)-2\right\} \tag{10}$$

となる。

《参考文献》

1)　日本数学教育学会誌　第74巻・第7号　pp. 18～28
河野芳文 (1992)「$\sum_{k=1}^{n}$ の公式の簡単な求め方について」

2)　日本数学教育学会誌　第72巻・第3号　pp. 15～19
村上一三 (1990)「$\sum k$，$\sum k^2$ のもう一つの一般化」

3)　日本数学教育学会誌　第72巻・第5号　pp. 58～65
内海庄三 (1990)「自然数の累乗の和 $\sum k^a$ の求め方について」

4)　数研通信　No. 42，pp. 20～21　村上秋雄
「$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ の図形的証明」

5)　数研通信　No. 29，pp. 5～7　加藤政仁
「自然数の平方の和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2$ について」

6)　数研通信　No. 27，pp. 24～25　坂本茂
「自然数の巾和」

7)　数研通信　No. 25，pp. 13～16　渡邊了梧
「自然数の累乗の和を定積分で表示する一考察」

(兵庫県立姫路商業高等学校)