正 n 角形から作られる三角形の個数について

坂本(さかもと)　哲雄(てつお)

新課程の数学Aの「場合の数」の章の中に「組合せ」の単元がある。

この中の演習問題に必ずと言ってよいほど次のような問題がある。

「正七角形の３頂点を結んでできる三角形のうちで，次のものはいくつあるか。

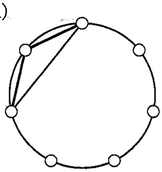
(1)　正七角形と２辺を共有するもの

(2)　正七角形と１辺だけを共有するもの

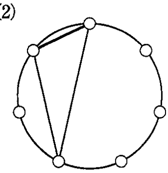
(3)　正七角形と辺を共有しないもの」

（参考図）

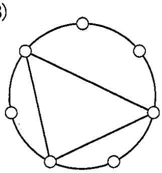
(1)



(2)



(3)



解答は(1)，(2)を利用して，(3)を求めていくのが通常であり，設問もそのように誘導されて作られている。確かに，(3)は補集合の考えを利用して求めるとわかりやすい。

しかし，生徒と同様，ここで疑問が生じる。

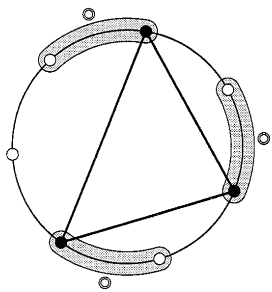
補集合の考えを用いずに，真っ向から求められないものなのだろうか。本来，授業でも１つの例題を説明するのに，真っ向から解いた時と補集合から解いた時とを両方提示して，生徒に「さあ，どっちが楽かな？」と指導していくのではないか。

疑問が生じると放っておけなくなるのが数学屋の悲しい性である。学校にある教材見本の数学の参考書，問題集を閲覧して調べてみた。つまり，(3)を真っ向から解いた解法が載っているかどうかを調べてみた。しかし，幸か不幸か，期待した解答は見つからなかった。皆，補集合の考えで解いてあった。

ひょっとしたら，この問題は真っ向からの計算では求められないのかもしれないとさえ思うようになった。半分あきらめの境地で何日か過ごしていたある日，もしかしてと何かひらめくものを感じ，さっそく紙と鉛筆で作業したところ，解決できたので以下，紹介する。

(3)の別解

例えば，次の具体例で考えてみる。



ここで，三角形の頂点を●で，その他の頂点を○で囲ってみる。すると，辺を共有しないから，●のとなりは必ず○である。ならば，●と右隣りの○は１つとみて，◎と置き換えてみることが可能である。

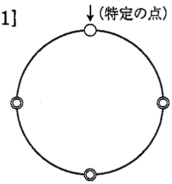
この結果，３つの◎と１つの○の回転を許さない円順列と１対１対応となる。

次に計算であるが，特定の頂点の場所に○が置かれている場合と，◎の中の●，および○が置かれている場合の３パターンについて調べると，それぞれ，1，3，3通りずつあるので，答は，

$1+3+3=7$ 通り

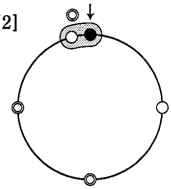
(参考図)

[1]



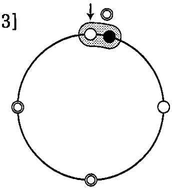
1通り

[2]



$_3C_1=3$通り

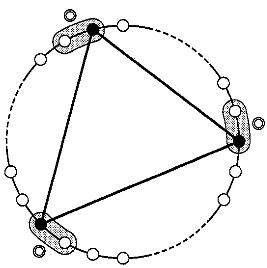
[3]



$_3C_1=3$通り

一般化

次に正 n 角形の場合に拡張してみる。
(n は7以上とする)



さきほどと同様に考えて◎3個と $n-6$ 個の○の作る，回転を許さない円順列の総数を求めればよい。
特定の頂点の場所が

i）○のとき，

◎3個と $n-7$ 個の○の順列だけあるから，

$${}_{n-4}C_3 \text{ 通り}$$

ii）◎の中の●のとき，

◎2個と $n-6$ 個の○の順列だけあるから，

$${}_{n-4}C_2 \text{ 通り}$$

iii）◎の中の○のとき，

◎2個と $n-6$ 個の○の順列だけあるから，ii）と同じで，

$${}_{n-4}C_2 \text{ 通り}$$

以上，i）～iii）を合計して，

$${}_{n-4}C_3+{}_{n-4}C_2\times2$$

$$=\frac{n}{6}(n-4)(n-5)$$

これは $n=6$ の時も成立する。

念のため，補集合の考えで求めて検算する。
全体は ${}_nC_3$ で，(1)の2辺共有は，n 通り，(2)の1辺共有は，$n(n-4)$ 通りゆえ，

$${}_nC_3-\{n+n(n-4)\}=\frac{n}{6}(n-4)(n-5)$$

確かに両者一致する。

かくして，真っ向からでも計算で求まることがわかった。求まってみると，別に複雑でもなく，むしろ参考書等でも紹介して良い解法ではないかと思う。なぜ，今まで紹介されていなかったのかが不思議に感じられる今日このごろである。

(山梨県私立駿台甲府高等学校)