私の数学教材研究ノートから　第2回

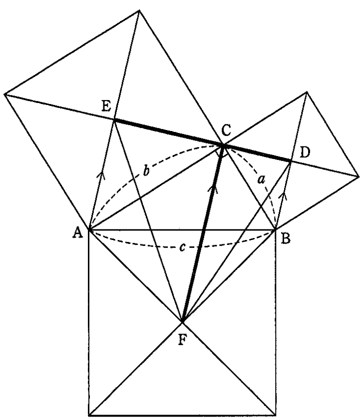
田島(たじま)　宅二(たくじ)

§1．その教材研究の動機

「数学A」には「平面幾何」が位置づけられているが，多くの高校では年間計画の中に選択肢から案外外れているのではあるまいか。なぜなら，第一に幾何は証明がつきものであり1問1問に手間がかかる。第二に生徒に「……であることを証明せよ。」と定期試験に作問したとき採点が大変である。第三にその試験問題の配点の占める割合を多くしなければならないために大問で2題と出せない。第四に幾何の学習は生徒にとっては理路整然としたやや思考時間の長くかかる学習であるため苦手を訴えるのを常とする。第五に数学の現代化の余波を受けて「集合」「確率」「統計」「漸化式」「ベクトル」「複素数」「複素数平面」等に押されている。こうした諸般の事情によるものと思われる。しかし，私は「幾何」ほど発見的な学習へと刺激するものはないと思っている。そして教師自身が発見的に教材を研究するのでなければ生徒を「幾何」へ誘(いざな)うことはできないであろう。

§2．「三平方の定理」の図からふと気づく

生徒に与えた課題と私の解答例である。



上図で，$\angle ACB=90^\circ$ の $\triangle ABC$ において $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$ とする。また，この各辺をそれぞれ1辺とする正方形を書き，その対角線の交点をD，E，Fとする。次の各問いに答えよ。

(1)　$DE\perp CF$ であることを証明せよ。

(証明)　ECは正方形の対角線の一部であるから

$\angle ACE=45^\circ$ ……………… ①

仮定から　$\angle ACB=90^\circ$ …… ②

正方形の対角線は直交するから

$\angle AFB=90^\circ$ ……………… ③

②，③から　$\angle ACB+\angle AFB=180^\circ$

ゆえに四角形CAFBは円に内接する。

そこで $\overset{\frown}{AF}$ の円周角により

$\angle ABF=\angle ACF=45^\circ$ …… ④

①，④から

$\angle ACE+\angle ACF=90^\circ$　$\therefore$ $EC\perp CF$

ここで，CDは正方形の対角線の一部であるから　$\angle BCD=45^\circ$ ……………… ⑤

①，②，⑤により3点E，C，Dは一直線上にあるから　$DE\perp CF$

(2)　$\triangle DEF$ の面積を求めよ。

(解)　$EA/\!/CF$ により

$\triangle ECF=\triangle ACF$ (等底等高) …… ⑥

$CF/\!/DB$ により

$\triangle DCF=\triangle BCF$ (等底等高) …… ⑦

⑥+⑦から

$\triangle ECF+\triangle DCF=\triangle ACF+\triangle BCF$

$\triangle DEF=$ 四角形 $CAFB=\triangle ABC+\triangle ABF$

$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}c^2$

(3)　CFの長さを求めよ。

(解)　$ED\times CF\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}c^2$ …… ⑧

$ED=EC+CD=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ ………… ⑨

⑧，⑨から $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}\times\mathrm{CF}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2ab+c^2}{4}$

ゆえに $\mathrm{CF}=\dfrac{\sqrt{2}(2ab+c^2)}{2(a+b)}$

(4) △AEF の面積を求めよ。

(解) $\triangle\mathrm{AEF}=\triangle\mathrm{AEC}=\dfrac{1}{4}b^2$

(5) △BDF の面積を求めよ。

(解) $\triangle\mathrm{BDF}=\triangle\mathrm{BDC}=\dfrac{1}{4}a^2$

就中，DE⊥CF が私の小さな感動であった。

§3．角の二等分線の長さ

三角形の中線の長さはパップスの定理を用いて求めるので教科書にも出てくるが，その角の二等分線の長さを求める問題は案外出て来ない。その公式をつくる過程を3つ発表することにしよう。

図1 図2

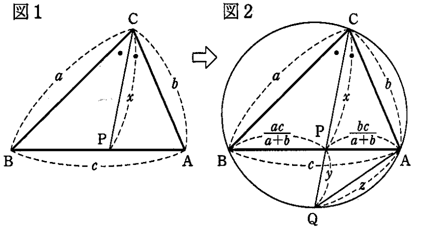


図1も図2も ∠BCP＝∠ACP，$a>b$ とする。三角形の角(内角)の二等分線の長さとは CP$(=x)$ をさしている。x を a，b，c で表すことができないか(つまり，きれいにまとまらないか)，研究してみた。

三角比の学習以前では図1のままではうまくいかない。そこで △ABC の外接円を図2のように書き，CP の延長と円との交点をQとし，QとAを結ぶ。

定理 CB：CA＝BP：AP と方べきの定理(二つの相似三角形から比をつくる)をいかして考えた。

△CBP∽△AQP から CP：AP＝CB：AQ

$$x:\frac{bc}{a+b}=a:z \quad \text{ゆえに}\quad z=\frac{abc}{(a+b)x} \cdots ①$$

また CP：AP＝BP：QP

$$x:\frac{bc}{a+b}=\frac{ac}{a+b}:y \ \text{ゆえに}\ y=\frac{abc^2}{(a+b)^2x} \cdots ②$$

次に △QAP∽△QCA から QA：QC＝AP：CA

$$z:(x+y)=\frac{bc}{a+b}:b \ \text{ゆえに}\ z=\frac{c(x+y)}{a+b} \cdots ③$$

①，③から

$$\frac{abc}{(a+b)x}=\frac{c(x+y)}{a+b} \quad \text{ゆえに}\quad \frac{ab}{x}=x+y \cdots ④$$

②を④に代入して $(x>0)$

$$\frac{ab}{x}=x+\frac{abc^2}{(a+b)^2x} \qquad x^2+\frac{abc^2}{(a+b)^2}=ab$$

$$x^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}=ab\left\{1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right\}$$

$$=ab\left\{\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2}\right\}$$

$x>0$ により

$$x=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} \cdots\cdots Ⓐ$$

三角比の学習以後では別解として，∠BCP＝∠ACP＝θ として余弦定理を用いて次のように立式する。

△CBP において

$$\cos\theta=\frac{a^2+x^2-\left(\dfrac{ac}{a+b}\right)^2}{2ax} \cdots\cdots ⑤$$

また △CAP において

$$\cos\theta=\frac{b^2+x^2-\left(\dfrac{bc}{a+b}\right)^2}{2bx} \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥から

$$\frac{a^2+x^2-\left(\dfrac{ac}{a+b}\right)^2}{2ax}=\frac{b^2+x^2-\left(\dfrac{bc}{a+b}\right)^2}{2bx}$$

$x\neq 0$ で，両辺に $2ab$ を掛けて

$$a^2b+bx^2-b\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2=ab^2+ax^2-a\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2$$

$$(a-b)x^2=ab(a-b)-ab(a-b)\left(\frac{c}{a+b}\right)^2$$

$a-b\neq 0$ であるから両辺を $a-b$ で割って

$$x^2=ab-ab\left(\frac{c}{a+b}\right)^2=ab\left\{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right\}$$

$$=ab\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\left(1-\frac{c}{a+b}\right)$$

$x>0$ から

$$x=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} \cdots\cdots Ⓑ$$

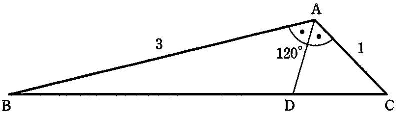
Ⓐ，Ⓑはここに一致した。ここに至って，これも三角形の内角の二等分線の長さの公式として，市民権を得ることになるかも知れない。

「三訂新版 チャート式 基礎と演習 数学Ⅰ＋A」(数研出版) の $p.181$ に

「∠A＝120°，AB＝3，AC＝1 である三角形 ABC の ∠A の二等分線が辺 BC と交わる点をDとする

とき，線分 AD の長さを求めよ。」(千葉工大) が載っている。

早速，この公式を適用してみよう。



$BC^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cos120°=13$

よって　$BC=\sqrt{13}$

$a=3,\ b=1,\ c=\sqrt{13}$ として代入すると

$$\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

$$=\frac{\sqrt{3\cdot1(3+1+\sqrt{13})(3+1-\sqrt{13})}}{3+1}=\frac{3}{4}$$

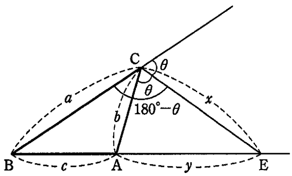
次に三角形の外角の二等分線の長さを研究してみよう。$a>b$ とする。

定理により

$a:b$

$=(c+y):y$

$\therefore y=\dfrac{bc}{a-b}$



また，$BE=c+y=\dfrac{ac}{a-b}$

△CAE において

$$\cos\theta=\frac{b^2+x^2-\left(\dfrac{bc}{a-b}\right)^2}{2bx}\ \cdots\cdots ⑦$$

また △CBE において

$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$

$$=\frac{a^2+x^2-\left(\dfrac{ac}{a-b}\right)^2}{2ax}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧から

$$\frac{b^2+x^2-\left(\dfrac{bc}{a-b}\right)^2}{2bx}=\frac{-a^2-x^2+\left(\dfrac{ac}{a-b}\right)^2}{2ax}$$

$$ab^2+ax^2-a\left(\frac{bc}{a-b}\right)^2=-a^2b-bx^2+b\left(\frac{ac}{a-b}\right)^2$$

$$(a+b)x^2=-ab(a+b)+ab(a+b)\left(\frac{c}{a-b}\right)^2$$

$$x^2=-ab+ab\left(\frac{c}{a-b}\right)^2$$

$$x^2=ab\left\{\left(\frac{c}{a-b}\right)^2-1\right\}$$

$$=ab\left(\frac{c}{a-b}+1\right)\left(\frac{c}{a-b}-1\right)$$

$$x^2=\frac{ab(c+a-b)(c-a+b)}{(a-b)^2}$$

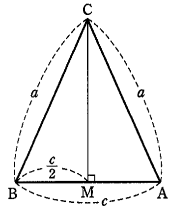
$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{ab(c+a-b)(c-a+b)}}{a-b}\cdots ©\ (x>0)$$

上記の千葉工大の問いに ∠A の外角の二等分線の長さを追加すると $a=3,\ b=1,\ c=\sqrt{13}$ から $x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ になる。

最後に特殊化して二等辺三角形の場合を吟味しておこう。

公式Ⓐで $a=b$ となったときである。

その長さ CM を求めてみよう。



すなわち

$$\frac{\sqrt{a\cdot a(a+a+c)(a+a-c)}}{a+a}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2(2a+c)(2a-c)}}{2a}=\frac{\sqrt{(2a+c)(2a-c)}}{2}$$

三平方の定理の見地から

$$CM^2=a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2=\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(a-\frac{c}{2}\right)$$

$$=\frac{(2a+c)(2a-c)}{4}$$

$CM>0$ により　$CM=\dfrac{\sqrt{(2a+c)(2a-c)}}{2}$

となって上述と一致する。

なお，二等辺三角形の頂角の外角の二等分線は存在するが長さは無限であり求めることができない。

その二等分線は底辺に平行になるから底辺の延長でも交点がない。©の公式で $a=b$ のときは $a-b=0$ となり，解が存在しないことでも知られる。

§4．結び

幾何教育の重要性は，生前，私淑する小平邦彦先生が声を大にして説かれた。「幾何」の研究に思わぬ発見が埋(うず)もれているからであろう。私たちは，できあがっている「幾何」の学習をふまえて，創造性ゆたかな研究態度で「幾何」を見直すことこそ先学に応える道である。この私の小論は「数研通信　数学　No. 33」の私の小論の続編である。

(元高校教員)