相加・相乗平均の不等式を産み出す根源的不等式について ～図形的な意味付けにこだわって～

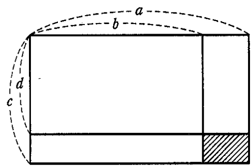
西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1．はじめに

高校で扱う不等式は，二乗すれば0以上であるという実数の性質を利用するものが多く，2数の場合の相加・相乗平均の不等式もそうである。相加・相乗平均の不等式は多産的で，さながら根源的不等式の感を呈しているが，この不等式を特例とする更なる根源的（条件付き）不等式がある。それは次の定理1である。

定理1
$a \geqq b > 0,\ c \geqq d > 0 \Longrightarrow ac + bd \geqq ad + bc$
（等号成立は $a=b$ または $c=d$ のとき）

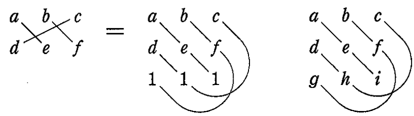
これは，$ac+bd-(ad+bc)=(a-b)(c-d)$ より直ちに導かれる。しかも，この不等式において，$c=a$, $d=b$ とすると，$a^2+b^2 \geqq 2ab$ となり，2数の場合の相加・相乗平均の不等式が導かれる。ここで a, b, c, d が正であるという条件は不要であるが，図形的に考察するため，それらに辺の長さという意味を持たせるために敢えて付けておくと，図1のような図形的（視覚的）証明が考えられる。ちょうど体系的・論理的で厳密なギリシャ数学に対する「見よ！」的なインド数学のようなものであるが，視覚に訴えるので「なるほど」と思ってしまう。つまり，2辺の長さがそれぞれ a, c と b, d である長方形の面積の和のほうが，a, d と b, c である長方形の面積の和より斜線部分の長方形の面積 $(a-b)(c-d)$ の分だけ大きく，それが0となるのはその1辺の少なくとも一方が0となる $a=b$ または $c=d$ のときであると言うことを語っている。このように解釈すると不等式と等号成立条件が視覚的に見えてくる。



（図1）

§2．定理1の拡張 ――図形的な意味付けにこだわって

さて，この定理1の拡張を試みるのは自然な流れであるが，これには複数の考え方がある。つまり，a, b と c, d と言う2組の2数の大小関係系列にそれぞれ1個ずつ加えて定理2とするか，3数の場合の相加・相乗平均の不等式の証明に活用することを意識して定理3とするかの2つがあるが，実は定理2は定理3において $g=h=i=1$ としたもの（図2参照）である。しかし，定理2は定理3の証明に使えるので，先にこの証明から考察することにする。



（図2）

定理2
$a \geqq b \geqq c > 0,\ d \geqq e \geqq f > 0 \Longrightarrow$
$ad + be + cf \geqq ae + bf + cd$
（等号成立は $a=b=c$ または $d=e=f$ または「$b=c$ かつ $d=e$」のとき）

定理1の拡張であるから，等号成立条件も同様に「$a=b=c$ または $d=e=f$」だけになりそうであるが，それに「$b=c$ かつ $d=e$」が加わることに注

意しなければならない。

> **定理3**
> $a \geqq b \geqq c > 0,\ d \geqq e \geqq f > 0,\ g \geqq h \geqq i > 0 \Longrightarrow$
> $$adg + beh + cfi \geqq aei + bfg + cdh$$
> (「等号成立は $a=b=c$，$d=e=f$，$g=h=i$ の3つのうち少なくとも2つが成り立つ」または「$b=c$ かつ $d=e$ かつ $g=h=i$」または「$a=b=c$ かつ $e=f$ かつ $g=h$」または「$a=b$ かつ $d=e=f$ かつ $h=i$」が成り立つとき)

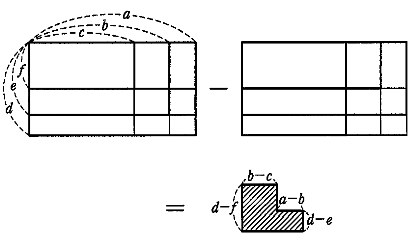
〔定理2の証明〕

(左辺)−(右辺)$= ad + be + cf - (ae + bf + cd)$

$= (a-b)(d-e) + (b-c)(d-f)$ …… (＊)

ここで，$a \geqq b \geqq c$，$d \geqq e \geqq f$ より，$a-b$，$d-e$，$b-c$，$d-f$ は0以上だから明らかに (＊) は0以上となる。等号成立は $(a-b)(d-e)$ と $(b-c)(d-f)$ が同時に0となればよいから，「$a-b=0$ かつ $b-c=0$」または「$a-b=0$ かつ $d-f=0$」または「$d-e=0$ かつ $b-c=0$」または「$d-e=0$ かつ $d-f=0$」であればよい。$d \geqq e \geqq f$ に注意すれば，$d-f=0$ は $d=e=f$ を意味し，このとき $a=b$ は不要であるから，$a=b=c$ または $d=e=f$ または「$b=c$ かつ $d=e$」が等号成立条件である。

これも a から f までの6数がすべて正という条件は不要であるが，この証明を図形的に考察するために付けておき，図3のように考えると，小長方形のその重なり具合から，左辺の方が斜線部分の図形の面積 ((＊) で表される) だけ大きく，$a=b=c$ または $d=e=f$ または「$b=c$ かつ $d=e$」のときにはそれが押しつぶされて面積が0になり，等号が成立するというわけである。$d-f=0$ であれば $a=b$ は不要というのも図3を見れば視覚的に納得できる。



(図3)

〔定理3の証明〕

$a'=a-b$，$b'=b-c$，$d'=d-e$，$e'=e-f$，$g'=g-h$，$h'=h-i$ とおくと，$a \geqq b \geqq c$，$d \geqq e \geqq f$，$g \geqq h \geqq i$ より a'，b'，d'，e'，g'，h' はすべて0以上であり，

『$a=a'+b'+c$，$d=d'+e'+f$，$g=g'+h'+i$
$b=b'+c$，$e=e'+f$，$h=h'+i$』…(※)

より，

$$\begin{aligned}
adg &= (a'+b'+c)(d'+e'+f)(g'+h'+i)\\
beh &= (b'+c)(e'+f)(h'+i)\\
cfi &= c\,f\,i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
aei &= (a'+b'+c)(e'+f)\,i\\
bfg &= (b'+c)\,f(g'+h'+i)\\
cdh &= c(d'+e'+f)(h'+i)
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
adg - aei &= (a'+b'+c)\{d'(g'+h'+i)\\
&\qquad +(e'+f)(g'+h')\}\\
beh - bfg &= (b'+c)\{e'(h'+i) - fg'\}\\
cfi - cdh &= -c\{(d'+e')(h'+i) + fh'\}
\end{aligned}$$

次に，これらの辺々を加え，しばらく計算すると，$(adg+beh+cfi)-(aei+bfg+cdh) = a'\{d'(g'+h'+i)+(e'+f)(g'+h')\} + b'\{d'(g'+h'+i)+e'(g'+h')+fh'+e'(h'+i)\} + c\{d'g'+e'(g'+h')\}$ を得る。

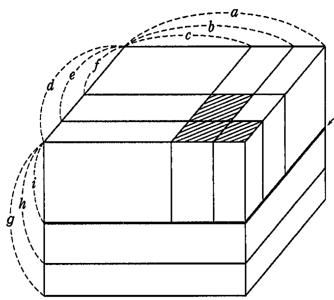
各文字はすべて0以上であるから，上の式は0以上である。これは (※) より次のように表せる。

$$\begin{aligned}
&(a-b)(d-e)g + (a-b)e(g-i) + (b-c)(d-e)g\\
&+(b-c)(e-f)(g-i) + (b-c)f(h-i)\\
&+(b-c)(e-f)h + c(d-e)(g-h) + c(e-f)(g-i)
\end{aligned}$$

これらは，図4のように横 a，縦 d，高さ g の直方体を考えるとき，各面に平行な平面で分割されてできている小直方体8つの体積の和であり，左辺で表される直方体の体積の和から右辺で表される直方体の体積の和を引いた差である。これを ΔV で表しておく。ΔV における8つの小直方体の体積を順に①から⑧までの番号を付け，等号が成立するときの，つまり $\Delta V=0$ となるときの条件を考える。

① $(a-b)(d-e)g$　　② $(a-b)e(g-i)$

③ $(b-c)(d-e)g$　　④ $(b-c)(e-f)(g-i)$
⑤ $(b-c)f(h-i)$　　⑥ $(b-c)(e-f)h$
⑦ $c(d-e)(g-h)$　　⑧ $c(e-f)(g-i)$



(図4)

方針は，定理2の利用を考えて，g, h, i の大小関係を基にした場合分けをすることである。

(I) $g=h$ のとき，⑦=0 となるから，
$\Delta V=(a-b)(d-e)g+(a-b)e(g-i)$
$+(b-c)(d-e)g+(b-c)(e-f)(g-i)$
$+(b-c)f(g-i)+(b-c)(e-f)g$
$+c(e-f)(g-i)$
である。(h はすべて g にしてある)

(1) $g=h=i$ のときは，②，④，⑤，⑧はすべて0になるから，$\Delta V=(a-b)(d-e)g$
$+(b-c)(d-e)g+(b-c)(e-f)g$
$=(ad+be+cf-ae-bf-cd)g$
ここで，定理2を適用すると $a=b=c$ または $d=e=f$ または「$b=c$ かつ $d=e$」のときに0となる。つまり，「$g=h=i$ かつ $a=b=c$」または「$g=h=i$ かつ $d=e=f$」または「$g=h=i$ かつ $b=c$ かつ $d=e$」であれば等号が成立する。

(2) $g=h>i$ のときは，$a=b$ と $a>b$ に場合分けして，さらに $a=b$ を $a=b=c$ と $a=b>c$ に場合分けすると，

(i) $a=b=c$ のとき，$\Delta V=c(e-f)(g-i)$
$g=h>i$ より $\Delta V=0$ となるのは $e=f$ のとき。よって，「$a=b=c$ かつ $e=f$ かつ $g=h$」が等号成立条件である。

(ii) $a=b>c$ のとき，$\Delta V=(b-c)(d-e)g$
$+(b-c)(e-f)(g-i)+(b-c)f(g-i)$
$+(b-c)(e-f)g+c(e-f)(g-i)$ であり，
$b>c$ かつ $g(=h)>i$ より $(b-c)(h-i)>0$ であるから⑤>0。よって，$\Delta V=0$ とはならない。

(II) $g>h$ のとき，$\Delta V=0$ となるには，⑦=0，つまり $d=e$ でなければならない。このとき $d=e=f$ と $d=e>f$ に場合分けする。

(1) $d=e=f$ のとき，
$\Delta V=(a-b)e(g-i)+(b-c)f(h-i)$
ここで，$g>h\geqq i$ であるから $\Delta V=0$ となるのは，$a=b$ かつ「$b=c$ または $h=i$」。
よって，「$a=b$ かつ $d=e=f$ かつ $h=i$」または「$a=b=c$ かつ $d=e=f$」が等号成立条件である。

(2) $d=e>f$ のとき，$\Delta V=(a-b)e(g-i)$
$+(b-c)(e-f)(g-i)+(b-c)f(h-i)$
$+(b-c)(e-f)h+c(e-f)(g-i)$
$g>h\geqq i$，$e>f$ より $(e-f)(g-i)>0$ であるから⑧>0。よって，$\Delta V=0$ とはならない。

以上から，定理3における等号成立条件「$a=b=c$，$d=e=f$，$g=h=i$ の3つのうち少なくとも2つが成り立つ」または「$b=c$ かつ $d=e$ かつ $g=h=i$」または「$a=b=c$ かつ $e=f$ かつ $g=h$」または「$a=b$ かつ $d=e=f$ かつ $h=i$」がすべて求められた。

特に，定理3において $a=d=g$ かつ $b=e=h$ かつ $c=f=i$ とすると，$a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$ となるので，3数の場合の相加・相乗平均の不等式が導かれ，等号成立条件 $a=b=c$ は定理3における等号成立条件に必ずある3数の一致条件から導かれる。

§3．まとめ

本論文では，相加・相乗平均の不等式をその特例として含むようなより根源的な不等式を，図形的な解釈から証明した。そのため定理3までの扱いしかしなかったが，それ以上については，条件や不等式についての一般化は容易であるが，その等号成立条件は煩雑になりそうである。一般化した場合の等号成立条件とその証明についてご教示願えれば幸いである。

(山口県立岩国高等学校)