数列の和の公式におけるひとつの関係について

小野里　武久（おのざと　たけひさ）

数列の和の２つの公式

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

の間にある $T_n=S_n{}^2$ という関係について，以前からある不思議さを感じていましたが，これらを結びつけるひとつのアイデアを得ましたのでここに報告します。

いま n 次の正方行列（あるいは n 行 n 列の表）を考え，その i 行 j 列成分を a_{ij}，n^2 個のすべての成分の和を U_n とします。$a_{ij}=i\cdot j$ となる行列

$1\cdot1$	$1\cdot2$	$1\cdot3$	$\cdots$	$1\cdot k$	$\cdots$	$1\cdot n$
$2\cdot1$	$2\cdot2$	$2\cdot3$	$\cdots$	$2\cdot k$	$\cdots$	$2\cdot n$
$3\cdot1$	$3\cdot2$	$3\cdot3$	$\cdots$	$3\cdot k$	$\cdots$	$3\cdot n$
	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$k\cdot1$	$k\cdot2$	$k\cdot3$	$\cdots$	$k\cdot k$	$\cdots$	$k\cdot n$
	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n\cdot1$	$n\cdot2$	$n\cdot3$	$\cdots$	$n\cdot k$	$\cdots$	$n\cdot n$

について，すべての成分の和は

$$(1+2+3+\cdots+n)^2$$

の展開で与えられるので

$$U_n=S_n{}^2$$

となります。一方，行列を破線のように n 個の「かぎがた」の部分に分け，k 番目の「かぎがた」にある $2k-1$ 個の成分の和を L_k とすると

$$\begin{aligned}L_k&=2k(1+2+3+\cdots+k)-k\cdot k\\&=2k\cdot\frac{1}{2}k(k+1)-k^2=k^3\end{aligned}$$

であるので

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}L_k=\sum_{k=1}^{n}k^3=T_n$$

となります。これで $T_n=S_n{}^2$ のひとつの説明になるかと思いますが，この方法は T_n の公式を導くうえでも自然であり，S_n のみを使うということで，教育的かと考えます。

正方行列を「かぎがた」に分けて和をとるという方法は，別の応用も考えられます。$a_{ij}=1$ となる行列については $L_k=2k-1$ より

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

が得られることはよく知られています。この他にも少々作為的ではありますが

$$a_{ij}=i+j+i\delta_{ij}\quad ただし\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\0 & (i\neq j)\end{cases}$$

となる行列は興味深い例になります。より具体的には

$$\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&3&\cdots&n\\1&2&3&\cdots&n\\&\cdots&&\cdots&\\1&2&3&\cdots&n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2&2&\cdots&2\\3&3&3&\cdots&3\\&\cdots&&\cdots&\\n&n&n&\cdots&n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\&\cdots&&\cdots&\\0&0&0&\cdots&n\end{pmatrix}$$

です。（第１と第２の行列については，行と列を入れ替える必要もないのですが，この方が美しく思えます。）このとき

$$L_k=2\{(1+2+3+\cdots+k)+k(k-1)\}+k=3k^2$$

から　$U_n=\sum_{k=1}^{n}L_k=3\sum_{k=1}^{n}k^2$

一方，すべての成分の和は S_n が $2n+1$ 個あることから

$$U_n=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が得られます。

（茨城県私立清真学園）