ユークリッド互除法とフィボナッチ数列と黄金比の直観的関係

もりしま　みつる
森島　充

(1)　はじめに

整数問題でよく使われる定理：

0でない整数 a，b の最大公約数を d とすると

$ax+by=d$

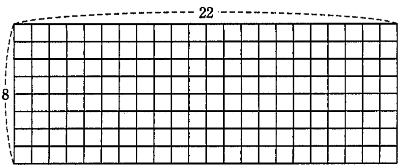
を満たす整数 x，y が存在する．

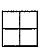
について，教室でできるような直観的な説明を考えていたところ，ふとタイトルに記したような「関係」を思いつきました．それをまとめたのが次の(3)と(4)です．(2)はそのきっかけとなったユークリッド互除法についての図形的説明で，おなじみのものかと思いますが，(3)，(4)との関連で書いておきました．

(2)　ユークリッド互除法

ユークリッド互除法について，具体的に8と22の場合について図形的に考えてみたいと思います．

まず縦が8，横が22の長方形を作ります．



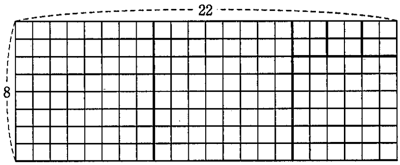
8と22は正の整数なので，この長方形には上の図のように1目盛を1とした格子線が引けます．すると8と22の最大公約数は2ですから，この長方形は 2×2の正方形  によってぴったりとうめつくすことが可能で，かつこれよりも大きな正方形では不可能です．さてこの図でユークリッド互除法の「しくみ」をこの図で再確認してみましょう．

互除法の手順は次の通りでした．

$22\div8=2\cdots6$　　$8\div6=1\cdots2$

$6\div2=3\cdots0$　よって最大公約数は2

これを先の図にあてはめると次のようになります．



つまり，8×8 の正方形を切りとる．2個取れる．あまったのは 8×6 の長方形．次にそこから 6×6 の正方形を切りとる．1個取れる．あまったのは 2×6 の長方形．次にそこから 2×2 の正方形を切りとる．3個取れる．あまりはなし．したがって，もとの 8×22 の長方形は 8×8 の正方形2個，6×6 の正方形1個，2×2 の正方形3個に分割できました．8×22 の長方形は，元々 1×1 の正方形を用いて分割されているので，この手順によって正方形のみを用いて分割できたのは実は当然のことです．さて，この手順を逆にたどると，6×6 の正方形と 8×8 の正方形も，2×2 の正方形を用いてぴったりとうめつくされます．

次に8と22の任意の公約数を仮に d_0 とします．すると 8×22 の長方形は $d_0\times d_0$ の正方形でぴったりとうめつくされるので，当然 8×8 の正方形もぴったりとうめつくされます．次に 6×6 の正方形がうめつくされ，最後に 2×2 の正方形がうめつくされます．

分かった事を整理すると

Ⅰ　8×22 の長方形は 2×2 の正方形でぴったりとうめつくされる．

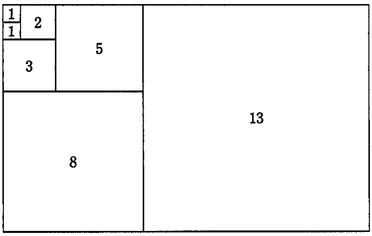
Ⅱ　d_0 が8と22の公約数ならば 2×2 の正方形は $d_0\times d_0$ の正方形でぴったりとうめつくされる．

したがってⅠ，Ⅱより8と22の最大公約数は2であると言えます．

(3) フィボナッチ数列

フィボナッチ数列の隣接する2項が互いに素であることを，(2)の図を用いて説明してみたいと思います．

フィボナッチ数列がどのような数列であるかは，よく次のような図を用いて説明されています．



上のように次々と正方形を書き加えていく…．この図を(2)の図と見比べてみると，もはや隣接する2項が互いに素であることは明らかです．なぜならば，上の図は 13×21 の長方形ですが，この図から13と21の最大公約数が1である事が分かるからです．

これで「説明」はおしまいですが，この事について少しだけ考察めいたことをしてみましょう．

(2)で8と22について行った互除法の手順は書き直すと(と言うよりも正しくは)

$22=8\times2+6 \Rightarrow 8=6\times1+2$

$\Rightarrow 6=2\times3+0$

と書けます．一方フィボナッチ数列は

$1+1=2 \Rightarrow 1+2=3 \Rightarrow 2+3=5$

$\Rightarrow 3+5=8 \Rightarrow 5+8=13 \Rightarrow \cdots\cdots$

ですが，これを逆に並べると

$\cdots\cdots \Rightarrow 13=8+5 \Rightarrow 8=5+3$

$\Rightarrow 5=3+2 \Rightarrow 3=2+1 \Rightarrow 2=1+1$

さらに強引ですが

$\cdots\cdots \Rightarrow 13=8\times1+5 \Rightarrow 8=5\times1+3$

$\Rightarrow 5=3\times1+2 \Rightarrow 3=2\times1+1$

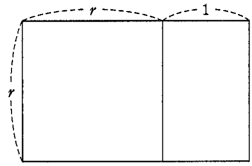
$\Rightarrow 2=1\times2+0$

と書き直せます．つまり，フィボナッチ数列はユークリッド互除法を行うと常に商が1であるような2数を順に並べていったものである，と見ることができます．ただし，「最後」は割る数が1となり，商2余り0で終わりますから，これは最大公約数が1，すなわちフィボナッチ数列の任意の隣接する2項が互いに素であることを示しています．

(4) 黄金比

(2)，(3)をふまえて，フィボナッチ数列の隣接する2項の比が黄金比に収束することを直観的に考えてみたいと思います．

次の図形的説明はおなじみのものです．



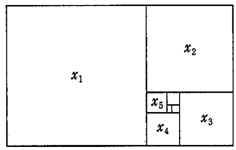
$r>0$ として

$r+1 : r=r : 1$

$r^2-r-1=0$

$r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

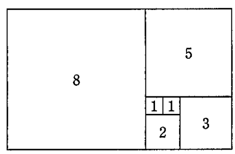
さらに，次のような図もよく見かけます．



——(＊)

図には，x_1，x_2，x_3，x_4，…という数字を記入しましたが，(3)と同様正方形の一辺の長さとします．しかし(3)と違い，こちらは内側に次々と正方形をかき加えていくわけです．この図を(＊)とします．

さて，(3)の図を(＊)と比較するために下のように並べかえてみましょう．これを(＊＊)とします．(＊＊)は外側に次々と正方形を書き加えていきます．



——(＊＊)

そして(＊＊)を，正方形を書き加えるのと同時に「同じスピード」で縮小することをイメージして下さい．$\boxed{1}\boxed{1}$ のあたりはどんどん小さくなって「目に見えなく」なります．するともはや(＊)と(＊＊)は「見分けがつかなく」なります．この事からフィボナッチ数列の隣接2項の比が黄金比に収束することは明らかです．

これについても，もう少し考察してみましょう．

(＊)の x_1，x_2，x_3，x_4，… については

$r : 1=x_1 : x_2=x_2 : x_3=x_3 : x_4=\cdots\cdots$

という式が成り立ちますが，図から分かるように

$x_1=x_2+x_3$，$x_2=x_3+x_4$，$x_3=x_4+x_5$，……

という式も成り立ちます．これは順序こそ逆ですが

まさにフィボナッチ数列の漸化式です．フィボナッチ数列はこの漸化式を整数の範囲で考えているので，順序を逆にすれば「１で終わる」のに対して，黄金比は実数の範囲で考えているので「無限に続けられる」というわけです．

逆に言うとフィボナッチ数列と黄金比は同じ漸化式を違う範囲で考えているだけで，実は同じものである，と言えるのかもしれません．こうやって見てみると，しばしば「神秘的」という言葉で語られるこの２つの関係も，直観的に「ごく当然の事」として受けとめられる気がします．

（東京都立国立高等学校）