曲線上を転がる小円の回転数について

清水　耕二，榎本　恵治

〔1〕 回転数を求める基本問題

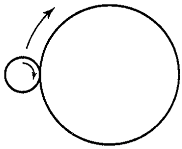
はじめに次の問題を解いてみてください．

(問1)

下の図のように，点Aから点Bまで長さ44 cmの直線上を半径1 cmの小円が滑らずに回転しながら移動する．このときの小円の回転数を求めよ．

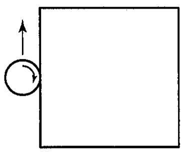
(問2)

半径4 cmの円の周りを，半径1 cmの小円が滑らずに回転しながら一周するとき，半径1 cmの小円は何回転するか．



(問3)

1辺22 cmの正方形の外周を半径1 cmの小円が滑らずに回転しながら一周するとき半径1 cmの小円は何回転するか．



(問1の答)　$\dfrac{44}{2\pi}=\dfrac{22}{\pi}$　回転

(問2の答)　5回転

(問3の答)　$\dfrac{88}{2\pi}+1=\dfrac{44}{\pi}+1$　回転

高校生にこの問題を出題したところ，(問1)は正答率が高いのですが，(問2)や(問3)は接点の移動距離を小円の円周で割って正解よりも1回転少ない答えを出してしまった者が意外に多いという結果がでました．このような問題に対する解法は，「小円の中心にある回転軸の移動距離を円周で割れば回転数が求まる」というものですが，このことをさらに一般化した定理として，以下に証明してみました．

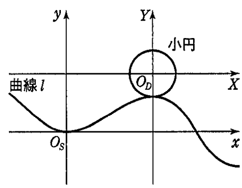
〔2〕 小円の回転数に関する定理

(定理1)

> 任意の曲線 l 上を滑らずに回転しながら移動する小円の回転数は，小円の中心にある回転軸が移動した距離を小円の円周で割った数に等しい．

直接証明に入る前に，次の2つの座標系について考える．任意の曲線 l 上に原点をとり，曲線 l に沿って小円が回転しながら移動するとしたときの座標系を**S 座標系**と名付ける．一方小円の回転軸を原点にとり，小円の回転に伴って曲線 l が移動するとみたときの座標系を**D 座標系**とする．小円の回転数を問題にするとき，小円の回転軸が動かない D 座標系で考えた方がわかり易い．

x-O_S-y を S 座標系の座標軸とし，原点 O_S は曲線 l 上にとる．



X-O_D-Y を D 座標系の座標軸とする．原点 O_D は小円の回転軸にとる．

S 座標系からみた D 座標系の原点 O_D の座標を $(x_{OD},\ y_{OD})$ として，座標変換を

$$\begin{cases} X=x-x_{OD} \\ Y=y-y_{OD} \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

で定義する．はじめに次の系を証明しておく．

(系)

> D 座標系において小円に接しながら移動する曲線 l 上の任意の点Pの軌跡は，S 座標系における小円の回転軸の移動の軌跡を反転した合同の図形となり，両者の移動距離は等しい．

S 座標系から，移動する D 座標系の原点 O_D をみると，O_D は時間のパラメータ t に従って曲線を描く．

この曲線が小円の回転軸の軌跡となっている．

$$\begin{cases} x_{OD}=f(t) \\ y_{OD}=g(t) \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

式②は小円の回転軸の軌跡を表す方程式である．$f(t)$，$g(t)$ は時間 t についての１価関数で，必ずしも微分可能でなくてもよい．

一方，D 座標系からみた S 座標系の原点 O_S の座標を $(X_{OS},\ Y_{OS})$ とすると，座標変換の式①に $x=0$，$y=0$ を代入して，

$$\begin{cases} X_{OS}=-x_{OD}=-f(t) \\ Y_{OS}=-y_{OD}=-g(t) \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

となる．この式は D 座標系における S 座標系の原点 O_S の軌跡が，S 座標系における小円の回転軸 O_D の移動の軌跡を反転した合同の図形となっていることを表している．

D 座標系からみると S 座標系に固定された曲線 l は，S 座標系とともに並進運動をすることになる．並進運動とは任意の２点を結ぶベクトルが運動の途中で向きや大きさを変えない運動である．

曲線 l 上の任意の点Ｐと S 座標系の原点 O_S とは，ともに S 座標系に固定されて並進運動をするから，点Ｐの軌跡は原点 O_S の軌跡と合同になる．ゆえに D 座標系において小円に接しながら移動する曲線 l 上の点Ｐの軌跡は，S 座標系における小円の回転軸の移動の軌跡を反転した合同の図形となり，両者の移動距離は等しい．（系証明終）

滑らずに回転しながら移動するという事柄を小円の回転軸を固定した D 座標系で考えてみる．滑らずに移動するということは，曲線 l 上の接点が瞬間的に円周上の接点と一致して動くということである．よって小円の半径を r，回転角を θ としたとき，接点の瞬間速度が $r\dfrac{d\theta}{dt}$ で表される．曲線 l の運動は並進運動であるから，接点の運動と曲線 l 上の任意の点Ｐの運動は同等な運動である．点Ｐの瞬間速度を $\dfrac{dp}{dt}$ で表すと，接点が曲線 l 上のどこにあっても常に

$$\frac{dp}{dt}=r\frac{d\theta}{dt} \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つことになる．

これを移動のはじめの時間 t_1 から終わりの時間 t_2 まで積分すると，

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dp}{dt}dt=\int_{t_1}^{t_2}r\frac{d\theta}{dt}dt=r(\theta_2-\theta_1) \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる．左辺は曲線上の任意の点Ｐの移動距離であり，これは（系）により小円の回転軸が移動した距離である．右辺は小円の半径×回転角を表している．これを小円の円周 $2\pi r$ で割ったものが小円の回転数になる．したがって，任意の曲線 l 上を滑らずに回転しながら移動する小円の回転数は，小円の回転軸が移動した距離を小円の円周で割った数に等しいといえる．（定理１証明終）

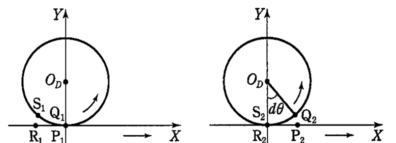
次に任意の曲線 l の形状によって以下の場合に分け，図を使って理解を深めよう．

(1) **曲線 l が直線の場合**

D 座標系でみたとき，dt 時間に接点が P_1 から R_2 に移動したとする．下付添え字は時間の経過を表し，ＰとＲは直線上の別の点であることを表す．このとき直線上の１点Ｐは P_1 から P_2 まで移動する．

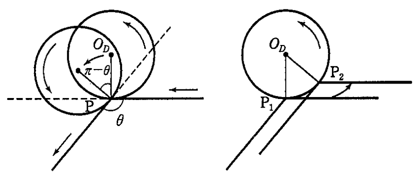
$dp=P_1P_2$ とおき，回転角を $d\theta$ とすると

$dp=rd\theta$ となり，④が成り立つ．



(2) **曲線 l に角があり，小円がその外側を廻る場合**

S 座標系でみると接点Ｐは固定され，小円の回転軸がＰを中心に回転する．図からわかるように，角が θ のとき，回転角は $\pi-\theta$ でこの場合は S 座標系の方がわかりやすい．これを D 座標系でみると接点Ｐは P_1 から P_2 まで円周上を回転移動する．この回転の間，常に④が成り立つ．

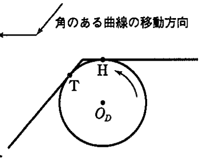


S 座標系　　　　D 座標系

(3) **曲線 l に角があり，小円がその内側を通る場合**

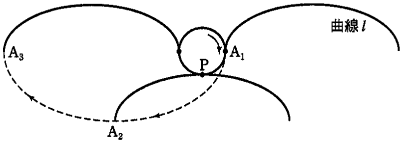
角を通過するとき，接点はＴからＨへ瞬間的に移動する．このとき回転角は０となり $\dfrac{dp}{dt}$ は定義

できない．
しかしこの場合⑤式の積分は角の前後で積分範囲を分けて積分すればよい．



(4) **曲線 l が上に凸で小円がその上側を廻る場合**

D 座標系でみると，下図のように曲線 l の移動（曲線 l の端点は $A_1A_2A_3$ の点線にそって移動する）にともなって接点が小円の回転と同じ方向に移動していくことがわかる．



接点がＰにあるときから，わずかに移動したときの図を下に示す．

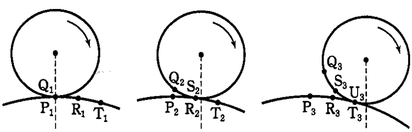


図１　　図２　　図３

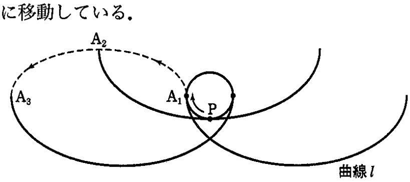
（この図は微小な移動をかなり大きな移動として誇張してあります．）

図１では接点が P_1，Q_1 であったが，図２では接点が R_2，S_2 に移動し，図３では接点が T_3，U_3 に移る．小円上の点Ｑは Q_1，Q_2，Q_3 の順に回転し，この回転に伴って曲線上の点Ｐは P_1，P_2，P_3 の順に移動する．この場合は図から④式が成り立つことをただちに理解することは困難である．

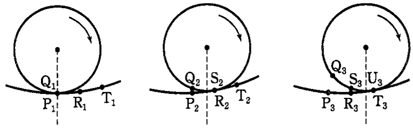
しかし接点が回転方向に移動するため，回転数は(1)の直線の場合に比べて増加することが図から読みとれ，④式が正しいことを定性的に示している．

(5) **曲線 l が下に凸で小円がその上側を廻る場合**

D 座標系でみると，接点が小円の回転とは逆方向に移動している．



接点がＰの位置からわずかに移動したときの図を下に示す．



小円上の点Ｑは Q_1，Q_2，Q_3 の順に回転移動し，回転にともなって点Ｐは P_1，P_2，P_3 の順に移動する．接点が回転方向と逆の方向に移動するため，回転数は(1)の直線の場合に比べて減少する．この場合も(4)と同様に④式が正しいことを定性的に示している．

〔３〕 定理１の応用問題

（問４）

半径 R 円周上の弧の長さを l，中心角を θ とする．この弧の内側と外側を回転しながら滑らずに移動する半径１の小円を２つを考える．弧の端から出発して長さ l を移動したとき，外側と内側の小円の回転数の差がちょうど１回転であった．このときの弧の中心角 θ を求めよ．

（問５）

大円の外側と内側を回転しながら滑らずに廻る２つの小円がある．この２つの小円の半径が等しいとすると，大円を一周したとき，外側と内側の小円の回転数の差が２回転となる．このことを証明しなさい．

次の（問６）は Peter Frankl･前原潤著「やさしい幾何学問題ゼミナール」（共立出版）からの引用である．

（問６）

半径１の n 個のコインが接して輪を作っている．接しているコインどうしの中心を結んでいくと凸多角形になっている．このコインの輪の外側を同じ大きさのコインが滑らずに回転しながら１周すると，このコインは何回転することになるか．

（問７）

１辺 a の正 n 角形の外側と内側を回転しながら滑らずにまわる半径 r の２つの小円の回転数について次の問に答えよ．

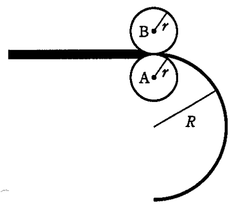
(ア) 外側をまわる小円の回転数を求めよ．

(イ) 内側をまわる小円の回転数を求めよ．

(ウ) 外側と内側の回転数の差を求めよ．また，$n \to \infty$ のときこの差が 2 回転になることを確かめよ．

(問 8)

下の図のような上下に配置した半径 r のローラー A，B をもつ圧延機で半径 R の缶の側面を作る．1 秒間にローラー A とローラー B の回転数の差が 1 回転であるとする．缶ができあがるとき，ローラーの回転にあわせて滑らずに圧延されるものとすると，何秒で 1 個の缶ができあがるか．またローラー A が 1 秒間に 10 回転するとき，できあがる缶の半径 R をローラーの半径 r の式で表せ．ただし缶の厚みは無視できるものとする．



(問 4) から (問 8) はどれも定理 1 を使えば苦労なく解ける問題である．

(問 4 の答)

内側の小円の回転軸が描く弧の長さを l_1，外側の小円の回転軸が描く弧の長さを l_2 とすると

$l_1=(R-1)\theta$ …… ①

$l_2=(R+1)\theta$ …… ②

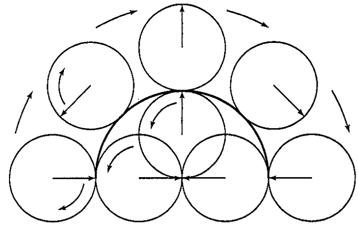
定理 1 より，回転軸の移動距離 $l_1 l_2$ を半径 1 の円周 2π で割って，それぞれの回転数がでる．問題よりこの差が 1 であるから

$$\frac{l_2}{2\pi}-\frac{l_1}{2\pi}=1 \quad \cdots\cdots ③$$

①②を③に代入して計算すると，R が消去されて，$\theta=\pi$ となる．

答 $\underline{\theta=\pi}$

具体例として弧の半径が $R=2$，小円の半径が $r=1$ の場合について図を使って確認してみよう．



上の図から明らかなように，半円の外側を廻る場合は 1.5 回転，内側の場合は 0.5 回転で，その差は 1 回転である．

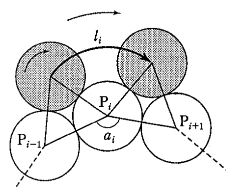
(問 5 の証明について)

問 1 と同様に回転軸の移動距離を計算すれば証明は容易であるので省略する．この結果は大円の半径にも，それを廻る小円の半径にも関係なく成り立つ．

(問 6 の答)

前掲書の解答は，半径が同じ円の外側を半周廻ると回転数が 1 回転になるという事実から比例関係で答えを出しているが，ここでは定理 1 を使って回転軸の移動距離を求める方法で解答する．

右図のように凸多角形の頂点を $P_i(i=1\sim n)$，頂点の内角を a_i とすると，凸多角形の内角の和は



$$\sum_{i=1}^{n} a_i=(n-2)\pi$$

である．回転軸の軌跡の描く曲線は半径 $2r$ の弧 (長さ l_i) を連結したものになる．その長さは

$$\sum_{i=1}^{n} l_i=\sum_{i=1}^{n} 2r\left(2\pi-a_i-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\pi r\left(\frac{4n}{3}-n+2\right)=2\pi r\left(\frac{n}{3}+2\right)$$

これを $2\pi r$ で割れば回転数が得られる．

答 $\underline{\frac{n}{3}+2}$

また凸多角形の内角がすべて 120° より大きい場合には，コインの輪の内側を一周すると

$\frac{n}{3}-2$ 回転することになる．

よって内側と外側の回転数の差は 4 回転である．

（問７の答）

(ア) $\left(\dfrac{na}{2\pi r}+1\right)$回転

(イ) $\left(\dfrac{na}{2\pi r}-\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}\right)$回転

(ウ) 公式 $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}=1$ を用いれば明らか

（問８の答）

缶が動かずにローラーが動く座標系で考える．問５の結果より，大円の外側と内側を１周するのに２回転の差が必要である．題意より１秒間に１回転の差があるので，１つの缶ができあがるのに２秒かかる．

また内側のローラーＡが１秒間に10回転すると，大円を半周することになるから，小円の回転軸の移動距離は回転数の定理１により $\pi(R-r)$ である．これを小円の周で割ったものが10回転になればよい．

$$\frac{\pi(R-r)}{2\pi r}=10$$

この式を R について解いて $R=21r$ を得る．

答　2秒間，$R=21r$

〔4〕 おわりにあたって

定理１の証明は分かりづらい表現になっていましたが，次の直感的な表現が理解を助けるものと思います．系の証明では，「地面から飛び上がったとき，飛び上がった人に座標軸をとれば（D 座標系），地面は下に下がったことになる．飛び上がった人が上に凸の放物線を描いて運動すると，D 座標系では地面が下に凸で合同な放物線を描く．」と言えば，あたりまえのことを言っていると思っていただけるでしょう．

定理１の内容は，「一輪車に乗って移動する場合に，タイヤが地面をけって進む接点の瞬間速度が，車軸の移動速度に等しい」ということを言っています．

あたりまえのことを長々と証明してきたようにも思えますが，定理１は応用範囲が広く，有用な定理であると考えています．

問５で回転数の差が２回転になりますが，大円のかわりに任意の閉曲線で２回転になることが直感的に予想できます．

いまのところ定理１をコンピュータによって数値計算し，楕円の場合に長軸や短軸の長さや小円の半径に関係なく約２回転になることがよい精度で確認できています．ただし小円の半径は楕円の曲率半径の最小値より小さくなくてはいけません．

また放物線の場合には回転数の差が約１回転であることも確認しています．

この予想が一般的に証明できれば，定理１で計算をした曲線の両側をまわる小円の回転数の差が，平面上の曲線の形状についての指標になる可能性があります．

問８などは工業専門の方から見れば幼稚な問題設定で実用にはなりそうもありませんが，「数学なんてなんの役にも立たない」という高校生に一考をせまるよい問題ではないかと思います．また定理１を利用した工業的な応用問題はこれ以外にもいろいろと作ることができます．

このレポートを書くにあたり，大変重要なアドバイスをいただきました県立姉崎高校数学科の井村昇先生に深く感謝いたします．

（千葉県立姉崎高等学校　清水耕二）
（元　千葉県立木更津高等学校　榎本恵治）