ある最小問題と包絡線について

真鍋(まなべ) 良彦(よしひこ)，福地(ふくち) 敏温(としはる)，遠藤(えんどう) 一成(かずなり)

1 はじめに

本校3年生真鍋良彦から，微分を使わないで次の問題を解けないかという質問をあれこれ考えているうちに美しい結論に到達した．

> **問題** 定点 $A(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$ を通り x 軸，y 軸の正の部分とそれぞれ P，Q で交わる直線を引くとき次の値の最小値を求めよ．
> (1) $OP\cdot OQ$ (2) $OP+OQ$
> (3) $\sqrt{OP^2+OQ^2}=PQ$

そして，定点 A を適当な条件の下で動かすとき，最小値をとる直線 PQ の包絡線は，それぞれ
(1) 双曲線 (2) 放物線 (3) アステロイド
になることはよく知られている．

本稿は，l_p-ノルムを用いて(2), (3)が一般化できること，包絡線が円になる場合が存在することを示すことが目的である．

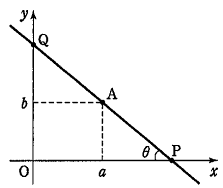
2 相加平均≧相乗平均による解法

右図において $\angle QPO=\theta$，$\tan\theta=t$ とおくとき，

$$OP=a+\frac{b}{\tan\theta}=a+\frac{b}{t}$$

$$OQ=b+a\tan\theta=b+at$$

と表すことができる．



(1) $OP\cdot OQ$

$$=\left(a+\frac{b}{t}\right)(b+at)=ab+a^2t+\frac{b^2}{t}+ab$$

$$\geqq 2ab+2\sqrt{a^2t\times\frac{b^2}{t}}=4ab$$

従って $OP\cdot OQ$ は $t=\dfrac{b}{a}$ のとき最小値 $4ab$

(2) $OP+OQ=a+\dfrac{b}{t}+b+at$

$$\geqq a+b+2\sqrt{\frac{b}{t}\times at}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

従って $OP+OQ$ は $t=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ のとき最小値 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

(3) $OP^2+OQ^2=\left(a+\dfrac{b}{t}\right)^2+(b+at)^2$

$$=a^2+\frac{2ab}{t}+\frac{b^2}{t^2}+b^2+2abt+a^2t^2$$

$$=a^2+a\left(\frac{b}{t}+\frac{b}{t}+at^2\right)+b\left(\frac{b}{t^2}+at+at\right)+b^2$$

$$\geqq a^2+3a\sqrt[3]{\frac{b}{t}\times\frac{b}{t}\times at}+3b\sqrt[3]{\frac{b}{t^2}\times at\times at}+b^2$$

$$=a^2+3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}+b^2$$

$$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3$$

従って $\sqrt{OP^2+OQ^2}$ は $t=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ のとき最小値 $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

3 一般化

平面上のベクトル $\vec{x}=(x_1,\ x_2)$ に対して

$$\|x\|_p=(|x_1|^p+|x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$

とおく．$p\geqq 1$ のとき l_p-ノルムと呼ばれ，特に
$p=1$ のとき $\|PQ\|_1=OP+OQ$
$p=2$ のとき $\|PQ\|_2=(OP^2+OQ^2)^{\frac{1}{2}}$ となり Euclid 距離である．

> **定理 1** 定点 $A(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$ を通り x 軸，y 軸の正の部分とそれぞれ P，Q で交わる直線を引く．$p<-1$，$p>0$ の場合
> $$\|PQ\|_p=(OP^p+OQ^p)^{\frac{1}{p}}\geqq(a^{\frac{p}{p+1}}+b^{\frac{p}{p+1}})^{\frac{p+1}{p}}\quad\cdots\cdots ①$$
> $-1<p<0$ の場合
> $$\|PQ\|_p\leqq(a^{\frac{p}{p+1}}+b^{\frac{p}{p+1}})^{\frac{p+1}{p}}\quad\cdots\cdots ②$$
> が成立する．等号成立は $t^{p+1}=\dfrac{b}{a}$ のときである．

証明

$$\|PQ\|_p{}^p=\left(a+\frac{b}{t}\right)^p+(b+at)^p=(at+b)^p\left(1+\frac{1}{t^p}\right)$$
$$=f(t)$$

とおく．

$$f'(t)=ap(at+b)^{p-1}\left(1+\frac{1}{t^p}\right)-pt^{-p-1}(at+b)^p$$
$$=p(at+b)^{p-1}\left(a+\frac{a}{t^p}-\frac{at+b}{t^{p+1}}\right)$$
$$=\frac{p(at+b)^{p-1}(at^{p+1}-b)}{t^{p+1}}$$

$$f\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right)=\left\{a\times\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}+b\right\}^p\times\left\{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right\}$$
$$=b^{\frac{p}{p+1}}\left(a^{\frac{p}{p+1}}+b^{\frac{p}{p+1}}\right)^p\times\frac{b^{\frac{p}{p+1}}+a^{\frac{p}{p+1}}}{b^{\frac{p}{p+1}}}$$
$$=\left(a^{\frac{p}{p+1}}+b^{\frac{p}{p+1}}\right)^{p+1}$$

$p<-1$，$p>0$ の場合 $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}=\alpha$ とおく

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
f'	／	$-$	0	$+$
f	／	↘	$f(\alpha)$	↗

よって①が成立する．

$-1<p<0$ の場合

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
f'	／	$+$	0	$-$
f	／	↗	$f(\alpha)$	↘

よって②が成立する．

4 包絡線

定理1の①式より次の定理が推定され，正しいことが証明できる．

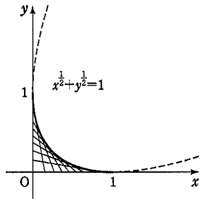
> **定理2**　$p<-1$ または $p>0$，$k>0$，
> $a^{\frac{p}{p+1}}+b^{\frac{p}{p+1}}=k$ を満たす正の数 a，b により点 A$(a,\ b)$ を定める．点Aを通り x 軸，y 軸の正の部分とそれぞれP，Qで交わる直線を引くとき，$\|PQ\|_p$ を最小にする直線群PQの包絡線は
> $x^{\frac{p}{p+1}}+y^{\frac{p}{p+1}}=k$ である．

注意

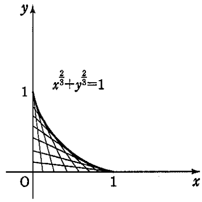
$p=1$ のとき　$\|PQ\|_1=OP+OQ$ であり包絡線は放物線 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=k$ になる．

$p=2$ のとき　$\|PQ\|_2=\sqrt{OP^2+OQ^2}$ であり，包絡線はアステロイド $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k$ である．

$p=1$，$k=1$ のとき



$p=2$，$k=1$ のとき



$p=-2$ のとき　$\|PQ\|_{-2}=\dfrac{OP\cdot OQ}{\sqrt{OP^2+OQ^2}}$ であり，包絡線は円 $x^2+y^2=k$ である．

定理2の証明

$\|PQ\|_p$ が最小のときの直線PQの傾きは，2より

$-\tan\theta=-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}$ なので，直線PQの方程式は

$$y-b=-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}(x-a)$$

$$\frac{x}{a^{\frac{1}{p+1}}}+\frac{y}{b^{\frac{1}{p+1}}}=a^{\frac{p}{p+1}}+b^{\frac{p}{p+1}}$$

ここで，$a^{\frac{1}{p+1}}=u$，$b^{\frac{1}{p+1}}=v$ とおく．

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}=k \quad\cdots\cdots ③$$

条件より $u^p+v^p=k$ ……④

③，④を u について微分すると

$$-\frac{x}{u^2}-\frac{y}{v^2}\frac{dv}{du}=0 \quad\cdots\cdots ⑤$$

$$pu^{p-1}+pv^{p-1}\frac{dv}{du}=0 \quad\cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥より $\frac{dv}{du}$ を消去して　$y=\left(\frac{v}{u}\right)^{p+1}x$

③に代入すると　$\frac{x}{u}+\frac{1}{v}\times\left(\frac{v}{u}\right)^{p+1}x=k$

よって

$$x=\frac{ku^{p+1}}{u^p+v^p}=\frac{ku^{p+1}}{k}=u^{p+1}$$

$$y=\left(\frac{v}{u}\right)^{p+1}\times u^{p+1}=v^{p+1}$$

④より，直線群PQの包絡線

$$x^{\frac{p}{p+1}}+y^{\frac{p}{p+1}}=k$$

が得られる．

《参考文献》
浅野英夫　名大数学のすべて　進学研究社

（愛知県滝高等学校）