入試問題のある関数方程式の背景について

宮田　毅一郎（みやた　きいちろう）

1　はじめに

未知の関数の性質を表す等式を関数方程式といい，微分方程式や積分方程式も関数方程式の一種です．

数研通信 No. 38 仁平政一著「入試問題のある関数方程式を新しい視点で解く」を読み，意識しながら入試問題を見直していくと関数方程式に関する問題が毎年どこかの大学で出題されつつも学習指導要領の変更に合わせて出題方法も変化していることにも気付きます．まず，特に重要な関数方程式のパターンを挙げると下記の4つであろうと思います．

重要な関数方程式

(1)　$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f'(0)=a$

　$\Longleftrightarrow$ $f(x)=ax$（x はすべての実数）

(2)　$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f'(0)=a$

　$\Longleftrightarrow$ $f(x)=e^{ax}$（x はすべての実数）

(3)　$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f'(1)=a$

　$\Longleftrightarrow$ $f(x)=\log|x|$　$(x\neq 0)$

(4)　$f(xy)=f(x)f(y)$，$f'(1)=a$

　$\Longleftrightarrow$ $f(x)=x^a$（a が正の整数ならすべての実数，a が負の整数なら $x\neq 0$，a が整数でなければ $x>0$）

※いずれも $a\neq 0$ とし，$f(x)$ はそれぞれの定義域で微分可能）

以後述べることはよく知られた内容ではあるかもしれませんが，従来微分可能性の条件を加えた形で出題されていた問題が，その条件を外し出題されていることを鑑み，知識の整理をする意味で実際に出題された入試問題を利用しつつ，関数方程式の出題方法やその背景を見ていきたいと思います．

2　実際の入試問題

2. 1　微分可能性の条件がある場合

まず最初に前の重要な関数方程式のパターンの(2)に該当する問題を考えてみます．これは，微分方程式でも積分方程式でもない関数方程式であり，関数方程式にもいろいろなタイプがありますが，微分できることが解かれば，微分方程式を導いて，それを解くのが定石です．

問題1（富山大）

関数 $f(x)$ が任意の実数 x，y に対して

$$f(x+y)=f(x)f(y)\cdots\cdots(*)$$

を満たしている．$f'(0)=a$（ただし $a\neq 0$）のとき

(1)　$f(0)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

もし，$f(x)$ が微分できると与えられていれば，$(*)$の両辺を y で微分して

$$f'(x+y)=f(x)f'(y)$$

$y=0$ とおいて

$$f'(x)=f'(0)f(x)=af(x)$$

となるのだが，本問では，$f'(0)$ の存在だけ与えられています．それだけを手がかりとして，すべての x で微分できることを示さなければならず，それには定義に戻るしかありません．

<u>解答</u>

(1)　$(*)$において $x=y=0$ とおくと $f(0)=\{f(0)\}^2$

$f(0)=0$ とすると任意の実数 x に対して

$f(x+0)=f(x)f(0)=0$ より $f(x)=0$

$f'(0)=0$ となり，$f'(0)=a\,(a\neq 0)$ に反するから

$f(0)=1$　答

(2)　$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\cdot\frac{f(h)-1}{h}$$

ところが

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=a$$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(x)\cdot\frac{f(h)-1}{h}=af(x)$$

すなわち，任意の x に対して $f'(x)$ が存在し

$f'(x)=af(x)$

$\therefore\ e^{ax}\{e^{-ax}f(x)\}'=0$

$\therefore\ \{e^{-ax}f(x)\}'=0$

$e^{-ax}f(x)=C\quad\therefore\ f(x)=Ce^{ax}$

$f(0)=C=1\quad\therefore\ f(x)=e^{ax}$ 答

$f(x)$ が微分できると与えられていれば，(2)は次のようになります．

$f'(x)=f'(0)f(x)=af(x)$ より

$\therefore\ f'(x)=af(x)$

$\therefore\ y=f(x)$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx}=ax$ (変数分離形)

これを解くと $y=f(x)=Ce^{ax}$

$f(0)=1$ より $C=1$

$\therefore\ f(x)=e^{ax}$ 答

以上により

$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f'(0)=a$

$\Longleftrightarrow f(x)=e^{ax}$ (x はすべての実数)

であることが解りました．

2. 2　微分可能性の条件がない場合

$x=0$ で微分できるという条件から，“すべての x で微分できることがわかる”というのが，前問のポイントの 1 つですが，この条件がない場合を考えてみます．

次は，2001 年に金沢大学後期日程理学部 (数学・計算科学科) に出題された問題です．前の問題を踏まえてこの問題を見れば，$f(x)$ が予想されますが，微分可能性について触れられていない点がこの問題のポイントでもあります．

問題 2 (金沢大学)

関数 $f(x)$ について，等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$ がすべての実数 x，y に対して成り立つと仮定する．さらに $f(0)\neq 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して，$f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ および $f(x)>0$ が成り立つことを示せ．

(2) $a=f(1)$ とする．$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ を a を用いて表せ．

(3) $f(x)$ がさらに増加関数であり，$f(1)=4$ とする．次の不等式を満たす実数 x の範囲を求めよ．

$4f(3x)-37f(2x)+41f(x)-8>0$

解答

(1) $f(x+y)=f(x)f(y)$ において $x=y=0$ とおくと $f(0)=\{f(0)\}^2$

$f(0)\neq 0$ より $f(0)=1$

$y=-x$ とおくと $f(0)=f(x)f(-x)$ かつ $f(x)\neq 0$

$1=f(x)f(-x)$ から，$f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 終

また，$f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2\geqq 0$，

$f(x)\neq 0$ より $f(x)>0$ 終

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\left\{f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2}=\sqrt{f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)}$

$=\sqrt{f(1)}=\sqrt{a}$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=f\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=f(1)\cdot f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$=a\times\sqrt{a}=(\sqrt{a})^3$ 答

(3) $f(2x)=f(x+x)=\{f(x)\}^2$

$f(3x)=f(2x+x)=f(2x)f(x)$

$=\{f(x)\}^2\cdot f(x)=\{f(x)\}^3$

よって，与えられた不等式は次のように表される．

$4\{f(x)\}^3-37\{f(x)\}^2+41f(x)-8>0$

$(4f(x)-1)(f(x)-8)(f(x)-1)>0$

これより $\dfrac{1}{4}<f(x)<1$，$8<f(x)$

$f(-1)=\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{4}$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=(\sqrt{4})^3=8$

よって，与えられた不等式は次のように表される．

$f(-1)<f(x)<f(0)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)<f(x)$

$f(x)$ は単調増加だから $-1<x<0$，$\dfrac{3}{2}<x$ 答

3　入試問題の背景を探る

$f(x+y)=f(x)f(y)\cdots\cdots(*)$

だけから，問題 2 の(1)，(2)より $f(x)=a^x$ (x は有理数) が成り立つことが予想されます．また，(3)は $f(x)=4^x$ と考えれば答が求まりそうです．その背景には $f(1)=a$ とおくと，

(i)：すべての有理数 x で $f(x)=a^x$ が成り立つ

更に $f(x)$ は $x=0$ で連続であるという条件を付け加えると，

(ii)：すべての実数 x で $f(x)=a^x$ が成り立つ

ことにあります．それを示すには次の定理を使います．

定理 1

区間 I で連続な 2 つの関数 f，g があり，I 内の有理数で一致するならば，I 全体で等しい．

$f(x)=g(x)(x\in I\cap\mathrm{Q})$

$\to f(x)=g(x)(x\in I)$

証明　I に属する無理数の 1 つを r とする．

$\lim_{n\to\infty}x_n=r(x_n\in I\cap\mathrm{Q})$ なる有理数列がある．

$f(x_n)=g(x_n)$ で f，g は連続であるから

$$f(r)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(r)\quad 終$$

※任意の無理数に収束する有理数列が必ず存在することは実は無理数の定義と考えてよい．

$f(0)=1$ であることは前に述べてあるので，問題 2 の解答方法を参考にしながら(i)，(ii)を示します．

解答

(i)　任意の x，h に対して $f(x+h)=f(x)f(h)$ が成り立ち，$f(x)$ が $x=0$ で連続なことから

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\{f(x+h)-f(x)\}\\&=\lim_{h\to 0}\{f(x)f(h)-f(x)\}\\&=\lim_{h\to 0}f(x)\{f(h)-1\}\\&=\lim_{h\to 0}f(x)\cdot\{f(0)-1\}=0\end{aligned}$$

$\therefore$ $f(x)$ はすべての x に対して連続である．終

(ii)　(*)において $y=x$ とおいて

$$\begin{aligned}f(2x)&=f(x)f(x)=\{f(x)\}^2\\f(3x)&=f(2x+x)=f(2x)f(x)\\&=\{f(x)\}^2f(x)=\{f(x)\}^3\end{aligned}$$

一般に自然数 n に対して

$$f(nx)=\{f(x)\}^n\ \cdots\cdots\ ①$$

$x=1$ とおいて $f(n)=\{f(1)\}^n$ …… ②

次に(*)において $x=1$，$y=-1$ とおいて

$$1=f(0)=f(1-1)=f(1)f(-1)$$

$\therefore$ $f(1)=\dfrac{1}{f(-1)}$

①で $x=-1$ とおいて

$$\begin{aligned}f(-n)&=\{f(-1)\}^n=\left\{\frac{1}{f(1)}\right\}^n\\&=\{f(1)\}^{-n}\ \cdots\cdots\ ③\end{aligned}$$

また，①で $x=\dfrac{1}{n}$ とおいて $f(1)=\left\{f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}^n$

$\therefore$ $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\{f(1)\}^{\frac{1}{n}}$ …… ④

①で $x=\dfrac{1}{m}$ とおいて，④を使えば

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{m}\right)\right\}^n=\{f(1)\}^{\frac{n}{m}}$$

結局任意の有理数 r に対して $f(r)=\{f(1)\}^r$

ゆえに $f(x)$ の連続性から定理 1 によって任意の実数 x に対して

$$f(x)=\{f(1)\}^x=a^x,\ a=f(1)\quad 終$$

つまり，問題 2 は関数方程式のパターンの(2)の微分可能性や連続性に関する条件を削除し写像の問題として出題したものの，答をある程度予想させながら解答することを求められていると言えそうです．当然，定理 1 (大学の初年度頃に習う)を知っていれば問題の見方も変わると思います．

4　その他の問題

4．1　その他のパターン問題

では，前の問題の解答と同様にパターン(1)の問題を解答しておきます．

問題 3　$f(x)$ が $(-\infty,\ \infty)$ で定義されていて

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ \cdots\cdots\ ①$$

がすべての x，y に対して成り立つとする．

(1)　$f(x)$ が $x=0$ で連続ならば，すべての x について連続であることを示せ．

(2)　$f(x)=ax$，$a=f(1)$ であることを示せ．

解答

(1)　①において $y=0$ とおいて $f(x)=f(x)+f(0)$

$\therefore$ $f(0)=0$ …… ②

任意の x，h に対して $f(x+h)=f(x)+f(h)$ が成り立ち，$f(x)$ が $x=0$ で連続なことから

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\{f(x+h)-f(x)\}&=\lim_{h\to 0}f(h)\\&=f(0)=0\end{aligned}$$

$\therefore$ $f(x)$ はすべての x に対して連続である．終

(2)　①において $y=x$ とおいて

$$\begin{aligned}f(2x)&=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)\\f(3x)&=f(2x+x)=f(2x)+f(x)\\&=2f(x)+f(x)=3f(x)\end{aligned}$$

一般に自然数 n に対して $f(nx)=nf(x)$ …… ③

$x=1$ とおいて $f(n)=nf(1)$ …… ④

次に①において $x=1$，$y=-1$ とおいて

$$0=f(0)=f(1-1)=f(1)+f(-1)$$

$\therefore$ $f(1)=-f(-1)$

③で $x=-1$ とおいて

$$f(-n)=nf(-1)=-nf(1) \cdots\cdots ⑤$$

また，③で $x=\dfrac{1}{n}$ とおいて $f(1)=nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1) \cdots\cdots ⑥$$

③で $x=\dfrac{1}{m}$ とおいて，⑥を使えば

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1)$$

結局任意の有理数 r に対して $f(r)=rf(1)$

ゆえに $f(x)$ の連続性から定理1によって任意の実数 x に対して

$$f(x)=xf(1)=ax,\ a=f(1)\ \text{答}$$

余談ですが，問題3を示すことが出来れば，次のパターン(3)に該当する問題も示すことが出来ます．

問題4　すべての x，y について次の関数を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f(xy)=f(x)+f(y)\ (0<x,\ y<\infty)$$

解答

$x>0$ で $X=\log x$ は連続．したがって e^X はすべての X について連続．ゆえに $f(e^X)=\varphi(X)$ もまた任意の $-\infty<X<\infty$ について連続．

$\therefore\ \varphi(X+Y)=f(e^{X+Y})=f(e^Xe^Y)=f(e^X)f(e^Y)$

$\therefore\ \varphi(X+Y)=\varphi(X)+\varphi(Y)\ \ (-\infty<X,\ Y<\infty)$

$\therefore$ 問題3によって $\varphi(X)=aX$

$\therefore\ f(x)=f(e^X)=\varphi(X)=aX=a\log x$ 答

4．2　その他の入試問題

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ のタイプでは関西学院大学(2001)が $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\geqq\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ を示させる問題を，$f(xy)=f(x)+f(y)$ のタイプでは早稲田大学(2000)が $f(x)$ が $x>0$ で定義された増加関数として出題されています．いずれにしても微分可能性については全く触れられない形で出題されていますが，ここまで述べてきたことを押さえておけば容易に解答出来るのではないかと思います．

5　おわりに

先日本県で第51回北陸四県数学教育大会が行われた際，記念講演で来られていた東京大学の薩摩順吉教授の話の中に次の趣旨のことを話されていました．

「年々大学生の学力は落ちているが，入学後に複素数や微分方程式を教える余裕がない．数年後に新学習要領の学生が入学してくるのを見越して数年前にアナウンスして入試問題に出題する方向で考えている」とのこと．

文部科学省は「学習指導要領は最低基準である」と最低基準性の一層の明確化を謳う一方で「学校において特に必要がある場合には，(学習指導要領に)示していない内容を加えて指導することもできる(学習指導要領総則　抜粋)」と発展的な学習，補充的な学習など，個に応じた指導の充実を謳い方針を変化させた現在，東大の入試方法の他大学への影響を考えれば数年後には微分方程式や積分方程式といった関数方程式等が多くの大学の理工系では以前の様に出題されることも考えられます．我々現場にいる人間もその心積もりが必要になりそうです．

《引用・参考文献》

(1) 旺文社数学編集部．2002年受験用全国大学入試問題正解　数学(国公立大編)．旺文社．2001．
(2) 土師政雄．微分・積分標準問題精講．旺文社．1984．
(3) 春日正文編．モノグラフ公式集4訂版．科学新興社．1988．
(4) 柴田敏男．現代数学レクチャーズ　微分積分．培風館．1978．
(5) 福田・鈴木・安岡・黒崎共編．詳解積分演習Ⅰ．共立出版．1960．

(金沢市立工業高等学校)

2002年10月末日記

追記

数研出版の「2003年版　数学Ⅲ・C入試問題集」に問題3のパターンの問題がお茶の水女子大・理や鹿児島大・理(推薦)の入試問題として出題されていました．

前に述べた関数方程式を，出題の仕方やヒントの与え方を工夫して高校生にも解きやすい形に出題した一例です．ルーツを持つ問題ですから，今後もこのような問題がどこかの大学で出題されると思われます．

(2003年11月追記)