―教育現場における基礎研究―

行列方程式の解法について

(可換零因子の存在と一意性)

小栗(おぐり)　是徳(よしのり)

1. はじめに

実数や複素数の世界では，零因子は存在しないので『$xy=0 \iff x=0$ または $y=0$』が成立する．これゆえに，2次以上の方程式の解は因数分解によって求めることができる．

ところが，行列の世界では，因数分解ができても零因子が存在するために厄介である．例えば
『$A^2-A-2E=O$ を満たす正方行列 A を求めよ』という問題は
$(A-2E)(A+E)=O$ より，$A=2E$，$-E$ は明らかだが，これ以外にも $A=A_0$ なる解が存在する．
このとき，$A_0-2E \neq O$，$A_0+E \neq O$，
$(A_0-2E)(A_0+E)=O$ が成立するので，
A_0-2E，A_0+E を零因子という．

この零因子を回避した解の求め方については，公文国際学園の石濱文武氏は『数研通信』第43号で『行列 n 次方程式の解法』と題して，次のように統一的に論じている．

> 2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$については，
> Cayley-Hamilton の方程式
> $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$
> を使えば，A の n 次方程式 $F(A)=O$ に対して A の次数を下げて，$sA=tE$ とできる．
> (i) $s \neq 0$ のとき，$A=kE$，ここで k は $F(k)=O$ の解
> (ii) $s=0$ のとき，$t=0$，このとき A は，$s=t=0$ なる行列
> としている．

この方法を仮に『$sA=tE$ 法』と名付けよう．

ところが，同氏は『§5　おわりに 注②』で，『$(A-2E)(A+E)=O$ より，$\det(A-2E)=0$，$\det(A+E)=0$ から，$A=2E$，$-E$ 以外の解を得ることもできるが理論的に難点があることに注意しなければならない』としている．

同氏のここでいう難点とは，零因子の存在である．つまり，行列方程式を解くに当たり，立ちはだかるのが零因子なのである．

実際の教育の現場で，生徒に指導する場合は，上記の『$sA=tE$ 法』が容易であり，零因子を避けて指導することになる．しかし，生徒は後述のように零因子に興味，関心をもっているので，教育的指導の立場からは，逆に積極的に零因子を研究し動機づけに大いに活用したいものである．そうすることによって，教師自身も生徒と共に学びながら数学の世界を広げられよう．

本稿の目的は，後述の『行列における零因子とはいかなる構造をしているか』という生徒からの質問に，具体的に応えると共に，零因子を応用した行列方程式の解法である．

本稿でのキーワードは，可換零因子であるが，このアイデアは，極めて単純である．それは，
$(A-2E)(A+E)=(A+E)(A-2E)=O$ を観察していて，$A-2E$ と $A+E$とが可換であることから思いついたからである．したがって，本稿は，この『可換零因子』を重要な条件として展開している．

2. 零因子とは何か

行列における零因子とは，例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように，$A \neq O$, $B \neq O$, $AB=O$ が成り立つとき，A，B を零因子という．

ここで，左側の零因子の例は，非可換である．よって，一般に零因子は可換でない．

(1) 高校生にとっての零因子

高校生にとって初めての零因子との出会いは，新鮮な驚きである．本校でも，かつて数学Cの授業で，生徒から『行列における零因子とはいかなる構造をしているか』『どうすれば零因子がつくれるのか』という質問があったことがある．ところが，それは偶然にも教育実習生の研究授業であった．残念なことに，実習生は，その場で応えられないのはやむを得ないとしても，実習最終日まで応えることなく帰ってしまったのである．その時以来，もし私自身が質問を受けたならどう応えるかについて，考え続けていた．その結果，拙作『行列における零因子の構造』というレポートをまとめるに至った．さらに，昨年数学Cの授業を担当したので，逆に生徒たちに過去のいきさつも含めて投げかけてみた．それに対して，生徒の1人，加賀谷英樹君は，以下の通りの小研究を試みたので紹介する．

(2) 生徒の小研究(要旨)

上記のような例から，2次の正方行列について『零因子 $\Longrightarrow$ 逆行列をもたない』ことが予想されるので，これを背理法によって証明．(必要条件)

ところが，逆に $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

のように，『逆行列をもたない』からといって『零因子』になるとは限らないので，十分条件についても考えた．

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=(b'_1 \quad b'_2)$$

とおくとき，必要条件より，$a_1 /\!/ a_2$, $b'_1 /\!/ b'_2$ であるが，必要十分条件として『$AB=O \iff a_i \cdot b'_j=0 \iff a_i \perp b'_j \quad 1 \leqq {}^\forall i,\ j \leqq 2$』を導いた．

3. 零因子の定義

通常，『$A \neq O$, $B \neq O$, $AB=O$ が成り立つとき，A, B を零因子という』としているが，この定義では，A と B の双方を零因子としているため混乱が生じている．実際，石濱氏や本稿2(2)の生徒の小研究では，『$PQ=O \Longrightarrow \det P=0$ かつ $\det Q=0$ は成立するが，この逆は成立しない』としている一方，例えば数研出版の『改訂版チャート式解法と演習　数学Ⅲ＋C』の267頁のinf．では，『P が零因子 $\iff$ P は逆行列をもたない』としている．いずれも，零因子の定義がwell-definedでないために起こる混乱である．

そこで，零因子を次のように定義する．

Def 1 (零因子の定義)

A が零因子とは，O でない A に対して ${}^\exists B \neq O$ s.t. $AB=O$ または $BA=O$

特に，$AB=BA=O$ が成立するとき，A を可換零因子という．

Remark　このように定義すると，『P が零因子 $\iff$ P は逆行列をもたない』が成立する．

この関係を，後述のMain　Theorem 1．で証明するために，以下の準備をする．

以下すべて，2次の正方行列に限るものとする．

Def 2 (行相似，列相似)

正方行列 P, Q について

P と Q が『行相似』とは，P と Q の対応する各行ベクトル同士が従属

P と Q が『列相似』とは，P と Q の対応する各列ベクトル同士が従属

Remark　通常の線型代数学では

『P と Q 相似 $\iff$ ${}^\exists A$ s.t. $\det A \neq 0$ かつ $Q=A^{-1}PA$』と定義しているが，ここでの行相似，列相似とは，単純に各行や列の成分の定数倍のことである．この行相似，列相似を使って，可換零因子の構造を明らかにする．

Lemma 1　$A \neq O$ のとき，

$BA=CA=O \Longrightarrow B$ と C は，行相似，つまり，左零因子同士は行相似

$AB=AC=O \Longrightarrow B$ と C は，列相似，つまり，右零因子同士は列相似

pr)　$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$　$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とおくと，$BA=CA=O$ より $b_i \cdot a'_j=c_i \cdot a'_j=0$

つまり，$b_i \perp a'_j$ かつ $c_i \perp a'_j$　ここで，$\det A=0$ より，A の各列ベクトル a'_j 同士が従属．よって，b_i と c_i は従属となり，B と C は，行相似

同様に，『$AB=AC=O \Longrightarrow B$ と C は，列相似』も成立する　□

Lemma 2　$A \neq O$ のとき，$BA=CA=O$ かつ $AB=AC=O$

$\Longrightarrow {}^\exists k$：スカラー　s.t.　$C=kB$ または $B=kC$

pr) $B=O$ または $C=O$ のときは，$k=0$ ととれば成立するので，$B\neq O$ かつ $C\neq O$ とする

$\det B=0$ より $B=\begin{pmatrix} k_1\boldsymbol{b} \\ k_2\boldsymbol{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{b}$

$\det C=0$ より $C=\begin{pmatrix} l_1\boldsymbol{c} \\ l_2\boldsymbol{c} \end{pmatrix}$とおくと，

Lemma 1 より B と C は行相似だから，

$\boldsymbol{c}=l\boldsymbol{b}$ とおくと $C=\begin{pmatrix} l_1 l\boldsymbol{b} \\ l_2 l\boldsymbol{b} \end{pmatrix}=l\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{b}$

次に，再び Lemma 1 より $B=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{b}$ と C は列相似より，$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}=m\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$とおくと

$C=(lm)B$ が成立．このとき，
$k=lm$ とおくと $k\neq 0$ □

4. 可換零因子の存在と一意性

Main Theorem 1 $A\neq O$ とする

$\det A=0 \iff \exists^1 B\neq O$ s.t. $AB=BA=O$ ただし B の一意性は定数倍を除くとする

pr) $\Longleftarrow$ については，背理法により成立

$\Longrightarrow$ について，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とすると，

$\det A=ad-bc=0$

〔第 1 段〕 B の存在を示す

Cayley-Hamilton の方程式より，

$A^2-(a+d)A=O$

$$\{A-(a+d)E\}A=A\{A-(a+d)E\}=O$$

よって，$A\neq O$ に対して，$B=g(A)\equiv A-(a+d)E$
$=\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$とおけば，

$B\neq O$ かつ $BA=AB=O$ が成立する

〔第 2 段〕 B の一意性を示す

if, $\exists C\neq O$ s.t. $AC=CA=O$ とすると

$\det A=0$, $BA=CA=O$ かつ $AB=AC=O$ が成立しているので，

Lemma 2 より，$\exists k\neq 0$：スカラー s.t. $C=kB$

よって，C は B の定数倍となり，B の一意性が成立する □

Th 2（可換零因子の構造）

$A\neq O$, $B\neq O$ とする．$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$で表すと

$$AB=BA=O \iff \det A=\det B=0 \text{ かつ } \exists k\neq 0\text{：スカラー s.t. } ka_{ii}+b_{jj}=0,\ ka_{ij}=b_{ij},\ 1\leqq \forall i\neq j\leqq 2$$

pr) $\Longleftarrow$ について $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，

$\det A=ad-bc=0$

$ka_{ii}+b_{jj}=0$, $ka_{ij}=b_{ij}$ $1\leqq \forall i\neq j\leqq 2$ より，

$B=k\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}\neq O$ となる

このとき，$AB=BA=O$ が成立

$\Longrightarrow$ について背理法により $\det A=\det B=0$ が成立

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，Main Theorem 1. より

$B=k\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ であるから

$ka_{ii}+b_{jj}=0$, $ka_{ij}=b_{ij}$ $1\leqq \forall i\neq j\leqq 2$ が成立 □

Cor $A\neq O$, $A^2=O \iff \det A=\mathrm{tr} A=0$

pr) Th 2. で，$B=A$ とおけばよい □

Remark この Cor. は，Cayley-Hamilton の方程式からもすぐ示される．

5. 行列方程式の解法について

2 次の正方行列 A についての行列方程式 $A^2+kA+lE=O$ の解は， 方程式 $x^2+kx+l=0$ の 2 つの解を α, β とするとき $\alpha=\beta$(重解)も含めて (i) $A=\alpha E$, βE (ii) $\mathrm{tr} A=-k$, $\det A=l$ を満たす任意の A

pr) 条件より，因数分解して

$(A-\alpha E)(A-\beta E)=(A-\beta E)(A-\alpha E)=O$ ☆

よって，(i)$A=\alpha E$, βE は成立 次に(ii)は，Th 2 を使って示す．

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とおくと，$A-\alpha E=\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}$

$A-\beta E=\begin{pmatrix} a-\beta & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix}$

ここで，$A-\alpha E\neq O$, $A-\beta E\neq O$ であるから，Th 2 において $k=1$ とおくと，☆は次の 2 式と同値

$$\det(A-\alpha E)=\det(A-\beta E)=0$$

かつ $(a-\alpha)+(d-\beta)=0$

解と係数の関係より $a+d=-k$, $ad-bc=l$ つまり $\mathrm{tr} A=-k$, $\det A=l$ が成立．

特に，$\alpha=\beta$(重解)のとき，$(A-\alpha E)^2=O$
$A=\alpha E$ 以外の解は，Th 2 の Cor より，
$\det(A-\alpha E)=0$ かつ $\mathrm{tr}(A-\alpha E)=0$ と同値である．
同様に解と係数の関係より $a+d=-k$, $ad-bc=l$

つまり $\mathrm{tr}A=-k$, $\det A=l$ が成立 □

最後に，次のことを注意して終わる．

Cayley-Hamilton の方程式より

「A の固有値が α, $\beta \Longrightarrow (A-\alpha E)(A-\beta E)=O$」は成立するが，逆は成立しない．(反例；$A=\alpha E$)

これより，$A \neq sE$ の条件下で，

$\alpha \neq \beta$ のとき $(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$

$\Longleftrightarrow \det(A-\alpha E)=\det(A-\beta E)=0$

$\Longleftrightarrow$ A は α, β を固有値とする任意行列

特に $\alpha=\beta$ のとき $(A-\alpha E)^2=O$

$\Longleftrightarrow \det(A-\alpha E)=\mathrm{tr}(A-\alpha E)=0$

$\Longleftrightarrow$ A は α, α を固有値とする任意行列

以上の任意行列の具体的な構成には，行列の標準化を用いる．

6. まとめ ―今後の進展―

(1) 解の存在と一意性

Th 2 は，『可換零因子の構造』についての明快な結果である．それを可能にしたのは，Main Theorem 1 で『可換零因子の解の存在と一意性』が保証されたからである．一般に，数学では，存在は容易であるが，その一意性が問題になることが多い．

本稿で，2 次の正方行列について，『可換零因子の構造』が明らかになったが，これを 3 次以上にすると様相が一変する．3 次元空間を考えただけでも，$AB=O$ のとき，次のように 3 通り考えられるので，一意性は言えなくなってしまうからである．

A，B が 3 次の正方行列のとき

CASE 1：A, B が 2 次のときの単純な拡張．このとき，$\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}'_j$ で 1 つの平面 π を決定している．(π を 3 次元空間の真部分空間という．)

CASE 2：$\boldsymbol{a}_i$ が 1 つの平面 π を決定して，$\pi \perp \boldsymbol{b}'_j$ (このとき，π を $\{\boldsymbol{b}'_j\}$ の直交補空間，または $\{\boldsymbol{b}'_j\}$ を π の直交補空間という．)

CASE 3：上と逆に $\boldsymbol{b}'_j$ が 1 つの平面 π を決定して，$\pi \perp \boldsymbol{a}_i$(直交補空間も同様)

まとめると，空間(3 次元)では

『$AB=O \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_i$ を含む平面 π または直線 l と，$\boldsymbol{b}'_j$ を含む直線 g または平面 Σ が，垂直』

(このとき，平面 π，直線 l を，それぞれ直線 g，平面 Σ の直交補空間という．)

一般に，これを n 次元に拡張すると，n 次元空間のある部分空間 W を垂直な 2 つの部分空間 W_1, W_2 に分割したとき，この W_1 から $\boldsymbol{a}_i$ を，W_2 から $\boldsymbol{b}'_j$ をとれば，$AB=O$ が成立する．

(2) 今後の進展

このように一意性は無理としても，私のレポート『行列における零因子の構造』の中で，n 次元空間でも可換零因子の存在が証明できたので，n 次正方行列の中で可換零因子が集合的にどんな位置付けになるか研究する余地は残っている．

また，本稿での行列方程式は，2 次の正方行列の 2 次方程式に限ったが，一般に『n 次正方行列の高次方程式』についても論じたいところである．これについては，紙面の関係で次回に譲りたい．

教育的にも研究的にも，零因子はその定義すら曖昧で，厄介者扱いされているようで残念なことである．一般の零因子は，明らかに研究対象にはなり得ないが，行列における零因子は大いに教育的かつ研究的に開発の余地を残していると思う．

(3) 数学教育における説明責任

最近，情報公開と共に説明責任が盛んに言われるようになった．数学教育の世界でも，いろいろな場面で説明責任が問われるであろう．この中で，生徒からの数学に関する質問，疑問に対して，きちんと対応することは，説明責任ということばを使うまでもなく，数学教師としては当然の義務である．これらの責任や義務を果たさないと，教師と生徒間の信頼関係は根本から崩れてしまうであろう．

最近の私は，『教育現場における基礎研究』という立場でいろいろと発信している．生徒からの質問，疑問は，今回の『零因子』に限らず，多種多様であろう．それに明快に応えていくためには，基礎研究は必要不可欠であると考えるからである．

本稿は，前任校の北海道石狩南高等学校におけるものである．

《参考文献》

石濱　文武氏『数研通信』第 43 号『行列 n 次方程式の解法』

数研出版『改訂版　チャート式　解法と演習　数学III＋C』

拙作　第 42 回数学教育実践研究会『行列における零因子の構造』

(ホームページ『数学のいずみ』で公開中)

(北海道深川農業高等学校)