cos の 2 倍角公式と大学入試問題

宮川（みやかわ） 幸隆（ゆきたか）

§1 '02 年立教大学・理学部の 2 番

本稿では，まず，標題の問題

> θが $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \cos 2\theta)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \cos 4\theta)$ が描く xy 平面の曲線を，それぞれ，A，B とする．
> (i) A および B の方程式を求め，そのグラフの概形を解答用紙の所定の図に記入せよ．
> (ii) A と B で囲まれた部分の面積を求めよ．

の背景を探ります．(i)の A は cos の 2 倍角公式を用いて

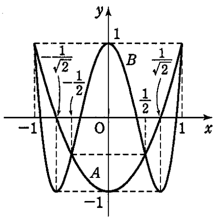
$$A:y=2x^2-1\ (-1 \leqq x \leqq 1)$$

と求まり，B はもう一度 cos の 2 倍角公式を用いて

$$B:y=8x^4-8x^2+1\ (-1 \leqq x \leqq 1)$$

と求まります．

そして，これらの概形は右図のようになります．



以上では，cos の 2 倍角公式のみを用いたのですが，n を自然数 1, 2, 3, ……とするとき，すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$$

を満たし，係数がすべて整数である n 次多項式 $T_n(x)$ が存在します．これらの多項式 T_n 達は，**Tschebyscheff（チェビシェフ）の多項式**と呼ばれます．例えば

$$T_3(x)=4x^3-3x$$

ですが，これは cos の 3 倍角公式を表しています．もっとすごい例としては

$$\begin{aligned}T_{26}(x)=&33554432x^{26}-218103808x^{24}\\&+627048448x^{22}-1049624576x^{20}\\&+1133117440x^{18}-825556992x^{16}\\&+412778496x^{14}-141213696x^{12}\\&+32361472x^{10}-4759040x^8+416416x^6\\&-18928x^4+338x^2-1\end{aligned}$$

などは如何でしょうか!?　しかも，

$-218103808=26\times(-8388608)$,
$627048448=26\times24117248$,
$-1049624576=26\times(-40370176)$,
$1133117440=26\times43581440$,
$-825556992=26\times(-31752192)$,
$412778496=26\times15876096$,
$-141213696=26\times(-5431296)$,
$32361472=26\times1244672$,
$-4759040=26\times(-183040)$,
$416416=26\times16016$,
$-18928=26\times(-728)$, $338=26\times13$

のように，$T_{26}(x)$ の最高次の項と定数項以外のすべての項の係数が 26 の倍数となっています．しかし，この一例だけを以ってして，すべての Tschebyscheff の多項式 $T_n(x)$ の係数の整数論的性質を分った積もりになってはいけません．**n が変われば整数論的性質も変わる**のです．

さて，上の問題の(ii)ですが，図から，対称性も考慮に入れて

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\{(8x^4-8x^2+1)-(2x^2-1)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\{(2x^2-1)-(8x^4-8x^2+1)\}dx$$

の 2 倍を求めれば良いのですが，I で $x=\cos\theta$ と置換すると，$dx=-\sin\theta d\theta$，
$$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{1}{2} \to 1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{3} \to 0 \end{array}$$
から

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos 4\theta-\cos 2\theta)(-\sin\theta)d\theta$$

$$+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\cos 4\theta-\cos 2\theta)(-\sin\theta)d\theta$$

となります．そこで，積和公式から，

$$\cos 2\theta\sin\theta-\cos 4\theta\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 3\theta-\sin\theta)-\frac{1}{2}(\sin 5\theta-\sin 3\theta)$$

$$=\sin 3\theta-\frac{\sin\theta}{2}-\frac{\sin 5\theta}{2}$$

に注意して，

$$I=\left[-\frac{\cos 3\theta}{3}+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{\cos 5\theta}{10}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$+\left[-\frac{\cos 3\theta}{3}+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{\cos 5\theta}{10}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)\times 2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

と求まります．

§2　'99年東京大学・理Ⅰ（後期）の1番

次に，標題の問題

> (1)　n を正の整数とする．$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲において
>
> $$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin nx}{\sin x} & -\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2},\ x\neq 0\\ c_n & x=0\end{cases}$$
>
> とおくことにより定義される関数 $f_n(x)$ が，連続関数となるように定数 c_n の値を定めよ．
>
> (2)　$f_3(x)$ は $\cos x$，$\cos 2x$ 等を用いて表せることを示し，定積分
>
> $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_3(x)dx$ の値を求めよ．
>
> (3)　任意の正の整数 n に対して，定積分
>
> $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_{2n+1}(x)dx$ の値を求めよ．

の背景を探ります．(1)は，$c_n=n$ と求まります［参考文献［2］参照!!］．

実は，§1と同様に，すべての実数 θ に対し

$$\sin n\theta=g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

を満たし，係数がすべて整数である $n-1$ 次多項式 $g_n(x)$ が存在します．$U_n(x)=g_{n+1}(x)$ とおけば $U_n(x)$ は n 次多項式です．これらの多項式 U_n 達は**第2種 Tschebyscheff 多項式**と呼ばれます．

例えば，

$$g_3(x)=4x^2-1$$

です．もっとすごい例としては

$$\begin{aligned}g_{32}(x)=32x\times(&67108864x^{30}-503316480x^{28}\\&+1702887424x^{26}-3435134976x^{24}\\&+4600627200x^{22}-4310958080x^{20}\\&+2901606400x^{18}-1417641984x^{16}\\&+502081536x^{14}-127339520x^{12}\\&+22573824x^{10}-2687360x^{8}+201552x^{6}\\&-8568x^{4}+170x^{2}-1)\end{aligned}$$

などは如何ですか!?　しかも，すべての項の係数が32の倍数となっています．しかし，Tschebyscheff の多項式のときと同様に，この一例だけを以ってして，第2種 Tschebyscheff 多項式 $g_n(x)$ の係数の整数論的性質を分った積もりになってはいけません．

$$32=2^5$$

であることに秘密があるのです．実は sin の2倍角公式と m に関する帰納法から，$g_{2^m}(x)$ のすべての項の係数は 2^m の倍数です．ただし，ここに，m は正整数です．更に，sin の2倍角公式と m，l に関する二重帰納法から，$g_{2^m l}(x)$ のすべての項の係数は 2^m の倍数となることが分かります．ただし，ここに，l は奇数の自然数です．ついでに言及しますと，cos の2倍角公式と m に関する帰納法から，$T_{2^m}(x)$ の定数項以外の項の係数は 2^m の倍数です．ただし，ここに m は正整数です．更に，p を奇素数とするとき，$T_{2p}(x)$ の定数項と最高次の項以外の項の係数は $2p$ の倍数なのです(説明は割愛します)．

さて，上の東大の問題の(2)ですが，

$$f_3(\theta)=g_3(\cos\theta)=4\cos^2\theta-1,\quad -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$$

$[\because$　上の例と，$f_3(0)=c_3=3=4\cos^2 0-1]$

ですから，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_3(\theta)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{2(1+\cos 2\theta)-1\}d\theta$$

$$=\Big[\theta+\sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

と求まります．ここでも cos の半角公式（それは，2倍角公式と言っても同じことになります）を本質的に用いている訳です．

さて，上の例 $g_{32}(x)$ の求め方を種明かししましょ

う：

実は，sin の加法定理から，多項式列 $\{g_n\}$ は，漸化式

$$g_{k+1}(x)=2xg_k(x)-g_{k-1}(x)\quad(k\geqq 2)$$

を満たすのです．

$$g_1(x)=1$$

は明らかであり，sin の 2 倍角公式から，

$$g_2(x)=2x$$

ですから，これらの初期条件と上の漸化式から，$g_n(x)$ はパソコンで次々と求まるのです．ついでに言及しますと，多項式列 $\{T_n(x)\}$ の漸化式は，cos の加法定理から得られます．上の漸化式から，

$$\begin{aligned}g_{k+2}(x)&=2xg_{k+1}(x)-g_k(x)\\&=2x\{2xg_k(x)-g_{k-1}(x)\}-g_k(x)\\&=(4x^2-1)g_k(x)-2xg_{k-1}(x)\\&=(4x^2-1)g_k(x)-g_{k-2}(x)-g_k(x)\\&=2(2x^2-1)g_k(x)-g_{k-2}(x)\quad(k\geqq 3)\end{aligned}$$

が成り立ちますが，これを上の東大の問題の(3)に用いると，まず，

$$\begin{aligned}&f_5(\theta)=g_5(\cos\theta)\\&=2(2\cos^2\theta-1)g_3(\cos\theta)-g_1(\cos\theta)\\&=2\cos 2\theta(1+2\cos 2\theta)-1\quad[\because\ \text{初期条件}]\\&=4\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta-1=1+2\cos 4\theta+2\cos 2\theta,\\&\qquad -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\left[\begin{array}{l}\because\ \ f_5(0)=c_5=5\\ \qquad =1+2\cos 0+2\cos 0\end{array}\right]\end{aligned}$$

ですから，

$$f_{2n+1}(\theta)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta\quad(n\geqq 1)$$

と予想されますが，$f_n(\theta)=g_n(\cos\theta)$ とから，

$$\begin{aligned}&f_{2n+1}(\theta)=g_{2n+1}(\cos\theta)\\&=2\cos 2\theta g_{2n-1}(\cos\theta)-g_{2n-3}(\cos\theta)\\&=2\cos 2\theta f_{2n-1}(\theta)-f_{2n-3}(\theta)\\&=2\cos 2\theta(1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos 2k\theta)\\&\quad-(1+2\sum_{k=1}^{n-2}\cos 2k\theta)\\&=(2-1)\times(1+2\sum_{k=1}^{n-2}\cos 2k\theta)+4\cos 2(n-1)\theta\\&\quad-4\sin^2\theta(1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos 2k\theta)\\&=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos 2k\theta+2\cos 2(n-1)\theta\\&\quad-4\sin^2\theta f_{2n-1}(\theta)\\&=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos 2k\theta+2\cos 2(n-1)\theta\\&\quad-4\sin\theta\sin(2n-1)\theta\\&=1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos 2k\theta+2\cos 2(n-1)\theta\\&\qquad+2\cos 2n\theta-2\cos 2(n-1)\theta\end{aligned}$$

となって，予想は正しく，求める値は π となります．ここでも cos の 2 倍角公式を本質的に用いています．

§3 '99年東京工業大学(後期)の 1 番

標題の問題は

> 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx$ を求めよ．

というものです．§1，2 と見てきたように，三角関数がからんだ積分の問題の定石は，積和公式や半角公式による次数下げです．ここでも当然，被積分関数を $\dfrac{\sin^2 nx}{1+x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{\cos 2nx}{1+x}\right)$ と変形し

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx=\frac{1}{2}\left\{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\sin 2nx}{2n(1+x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}dx\right\}$$

とすると，$\displaystyle\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}dx\right|\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin 2nx|}{(1+x)^2}dx\leqq\frac{\pi}{2}$

ですから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}dx\right|=0$ となって

与式$=\dfrac{1}{2}\log\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ となります．この解法は，参考文献〔2〕で紹介されていて，相当巧妙で思い付かなくてもよい？と判断され，本問は難問とランク付けされていますが，当然このように解くべきですし，このような常套手段を取れば，それ程の難問でもありません．

《参考文献》

〔1〕雑誌「大学への数学」'02 年 4 月号，特集 2002 年大学入試問題，東京出版

〔2〕雑誌「大学への数学」'99 年 5 月号，特集 1999 年大学入試問題，東京出版

(静岡県立三島北高等学校)