生徒の発見から

結川（ゆいかわ）　義明（よしあき）

『数学II』の教科書[1]に『常用対数』を利用する問題として，次のようなものがある．

> $\log_{10}2=0.3010$ とする．2^{30} は何桁の整数か．

8桁表示の電卓でもオーバーフロウしてしまうような大きな累乗でも常用対数を用いれば，おおよその大きさが把握できるということで，数学の有用性を生徒に実感させる良い問題であると考えている．

以前この問題を授業で取り上げたときに，ある生徒が次のことを予想した．

> 予　想
> 2の累乗 2^n の各位の数字はある間隔で繰り返し出てくる．

下の表は $n=1$ から50までの2の累乗 2^n の値をまとめたものである．

n	2の n 乗	n	2の n 乗
1	2	26	67108864
2	4	27	134217728
3	8	28	268435456
4	16	29	536870912
5	32	30	1073741824
6	64	31	2147483648
7	128	32	4294967296
8	256	33	8589934592
9	512	34	17179869184
10	1024	35	34359738368
11	2048	36	68719476736
12	4096	37	137438953472
13	8192	38	274877906944
14	16384	39	549755813888
15	32768	40	1099511627776
16	65536	41	2199023255552
17	131072	42	4398046511104
18	262144	43	8796093022208
19	524288	44	17592186044416
20	1048576	45	35184372088832
21	2097152	46	70368744177664
22	4194304	47	140737488355328
23	8388608	48	281474976710656
24	16777216	49	562949953421312
25	33554432	50	1125899906842624

この表を見ると，1の位の数字は

2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ……

となっており，4個の数字が繰り返し出てくる（同じ数列が次に出てくる間隔をここでは“周期”と呼ぶことにする．したがって，この場合の周期は4である）．また，10の位の数字も

1, 3, 6, 2, 5, 1, 2, 4, 9, 9, 8, 6, 3, 7, 4, 8, 7, 5, 0, 0,
1, 3, 6, 2, 5, 1, 2, 4, 9, 9, 8, 6, 3, 7, 4, 8, 7, 5, 0, 0,
1, 3, 6, 2, 5, 1, 2

となっており，20を周期として数字が繰り返し出てくることがわかる．どうやら生徒の予想は正しいようである．

さて，10の位の周期20はどのようにして求められるのか，次にそれを考えてみたい．

10の位が始まるのは $2^4=16$ であるから，これに2を何回掛けると下2桁の数字が再び16になるかを考えればよい．そこで，掛ける回数を m とする（この m が周期になる）．$2^4\times2^m$ は下2桁の数字が16であるから，$(2^4\times2^m-2^4)$ は下2桁の数字が00となり，この数字は100で割り切れることになる．したがって，次の①を満たす最小の m を求めればよいことになる．

$$2^4\times2^m-2^4\equiv0 \pmod{100} \quad \cdots\cdots ①$$

$2^4\times2^m-2^4=2^4(2^m-1)$

かつ　$2^4\equiv0 \pmod 4$　より

$2^4\times2^m-2^4\equiv0 \pmod{100}$

$\iff$　$2^m-1\equiv0 \pmod{25}$

さらに，

$2^4-1\equiv0 \pmod 5$　かつ

2^m-1

$=(2^4-1)(2^{m-4}+2^{m-8}+2^{m-12}+\cdots\cdots+2^8+2^4+1)$

であるから

$2^m-1\equiv 0 \pmod{25}$

$\iff 2^{m-4}+2^{m-8}+2^{m-12}+\cdots\cdots+2^8+2^4+1$

$\equiv 0 \pmod{5}$

また，$m=4n$ より

$2^{m-4}+2^{m-8}+2^{m-12}+\cdots\cdots+2^8+2^4+1$

$=2^{4n-4}+2^{4n-8}+2^{4n-12}+\cdots\cdots+2^8+2^4+1$

$=(2^4)^{n-1}+(2^4)^{n-2}+(2^4)^{n-3}+\cdots\cdots+(2^4)^2+2^4+1$

ここで，$2^4\equiv 1 \pmod{5}$より

$(2^4)^{n-1}\equiv(2^4)^{n-2}\equiv(2^4)^{n-3}\equiv\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\equiv(2^4)^2\equiv 1 \pmod{5}$

このことから，

$(2^4)^{n-1}+(2^4)^{n-2}+(2^4)^{n-3}$

$+\cdots\cdots+(2^4)^2+2^4+1\equiv 0 \pmod{5}$

を満たす最小の $n=5$ である．

したがって，①を満たす $m=20$ となる．

同様にして，100 の位の周期を求めるには

$$\boxed{2^7\times 2^m-2^7\equiv 0 \pmod{1000}}$$

を満たす最小の m を求めればよいことになる．この場合，$m=100$ となり，下 3 桁の数字が再び 128 になるのは 2^{107} ということになる．ちなみに，

$2^{107}=162259276829213363391578010288128$

である．

※ちなみに Windows 98 にあるアクセサリの『電卓』で 2^n の正確な値を求めるには $n=119$ までが限界である．

次に，10^N の位の周期を求めてみたい．

10^N の位の周期を求めるには

$$\boxed{2^n\times 2^m-2^n\equiv 0 \pmod{10^{N+1}}}$$

を満たす最小の m を求めればよい．この場合，明らかに $n\geqq N+1$ であるから

$2^n\times 2^m-2^n\equiv 0 \pmod{10^{N+1}}$

$\iff 2^m-1\equiv 0 \pmod{5^{N+1}}$

さらに，

$2^4-1\equiv 0 \pmod{5}$ かつ

2^m-1

$=(2^4-1)(2^{m-4}+2^{m-8}+2^{m-12}+\cdots\cdots+2^8+2^4+1)$

であるから

$2^m-1\equiv 0 \pmod{5^{N+1}}$

$\iff 2^{m-4}+2^{m-8}+2^{m-12}+\cdots\cdots+2^8+2^4+1$

$\equiv 0 \pmod{5^N}$

また，$m=4n$ より

$2^{m-4}+2^{m-8}+2^{m-12}+\cdots\cdots+2^8+2^4+1$

$=2^{4n-4}+2^{4n-8}+2^{4n-12}+\cdots\cdots+2^8+2^4+1$

$=(2^4)^{n-1}+(2^4)^{n-2}+(2^4)^{n-3}+\cdots\cdots+(2^4)^2+2^4+1$

ここで，$2^4\equiv 1 \pmod{5}$より

$(2^4)^{n-1}\equiv(2^4)^{n-2}\equiv(2^4)^{n-3}\equiv\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\equiv(2^4)^2\equiv 1 \pmod{5}$

このことから，

$(2^4)^{n-1}+(2^4)^{n-2}+(2^4)^{n-3}$

$+\cdots\cdots+(2^4)^2+2^4+1\equiv 0 \pmod{5^N}$

を満たす最小の $n=5^N$ である．

したがって，求める $m=4\cdot 5^N$ となる．

他の自然数の周期はどうなるか．次に，6 の累乗 6^n の各位の周期を考えてみたい．

下の表は $n=1$ から 16 までの 6 の累乗 6^n の値をまとめたものである．

n	6 の n 乗	n	6 の n 乗
1	6	9	10077696
2	36	10	60466176
3	216	11	362797056
4	1296	12	2176782336
5	7776	13	13060694016
6	46656	14	78364164096
7	279936	15	470184984576
8	1679616	16	2821109907456

この表から，1 の位の周期は 1 であり，10 の位の周期は 5 であることがわかる．

100 の位の周期を求めるには

$$\boxed{6^3\times 6^m-6^3\equiv 0 \pmod{1000}}$$

を満たす最小の m を求めればよい．

$6^3\equiv 0 \pmod{8}$より

$6^3\times 6^m-6^3\equiv 0 \pmod{1000}$

$\iff 6^m-1\equiv 0 \pmod{125}$

さらに，

$6-1\equiv 0 \pmod{5}$ かつ

6^m-1

$=(6-1)(6^{m-1}+6^{m-2}+6^{m-3}+\cdots\cdots+6^2+6+1)$

であるから

$6^m-1\equiv 0 \pmod{125}$

$\iff 6^{m-1}+6^{m-2}+6^{m-3}+\cdots\cdots+6^2+6+1$

$\equiv 0 \pmod{25}$

ここで,

$$6^{m-1}\equiv 6^{m-2}\equiv 6^{m-3}\equiv\cdots\cdots\equiv 6^2\equiv 1 \pmod 5$$

このことから,

$$6^{m-1}+6^{m-2}+6^{m-3}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+6^2+6+1\equiv 0 \pmod{25}$$

を満たす最小の $m=25$ となる.

上記の要領で, 1を除く一桁の自然数について, 各位の周期を求めると下の表のようになる.

自然数	2	3	4	5
1の位	4	4	2	1
10の位	20	20	10	1
10^2 の位	100	100	50	2
10^3 の位	500	500	250	4
10^N の位	$4\cdot 5^N$ $(N\geqq 0)$	$4\cdot 5^N$ $(N\geqq 0)$	$2\cdot 5^N$ $(N\geqq 0)$	2^{N-1} $(N\geqq 1)$

自然数	6	7	8	9
1の位	1	4	4	2
10の位	5	4	20	10
10^2 の位	25	20	100	50
10^3 の位	125	100	500	250
10^N の位	5^N $(N\geqq 0)$	$4\cdot 5^{N-1}$ $(N\geqq 1)$	$4\cdot 5^N$ $(N\geqq 0)$	$2\cdot 5^N$ $(N\geqq 0)$

生徒の発見から累乗の各位の数の周期性について考えてみた. このような発見をするには根気のいる計算をある程度までやらなければならないし, たとえ計算したとしても数の並びの規則性に気がつかなければならない. 古来から数学上の発見をした多くの偉人達もこのような根気のいる作業を通し, その中にある法則性や規則性を見つけ, 定理や公式を導いてきたのである.

今回の発見は数学的には取るに足らないものかもしれないが, このような生徒の発見を教師が賞賛することにより数学への興味・関心を高め, さらに高い次元へと思考を発展させていくものと思われる. 今後ともこのような生徒の発見(予想)を大切にしながら授業を展開していきたい.

《参考文献》

1)数研出版『改訂版 高等学校　新編数学II』

(埼玉県立所沢高等学校)