面積の公式から

松田(まつだ)　康雄(やすお)

はじめに

2つの放物線とその共通接線によってできる部分，および1つの放物線と2本の接線によってできる部分の面積の計算法について，通称「12分の1の公式」と呼ばれているものがある．生徒諸君は，センター試験用の裏技の公式として結構覚えているが，理由は余り分かっていないように思う．筆者は，生徒諸君に，理由を納得させた上で使わせたいと願っている．本稿はその「12分の1の公式」の理由と応用をまとめたものである．

1．放物線と接線によってできる部分の面積

次の2つの公式が通称「12分の1の公式」である．

公式1．

$y=ax^2+bx+c$ ……①

$y=ax^2+b'x+c'$ ……①′

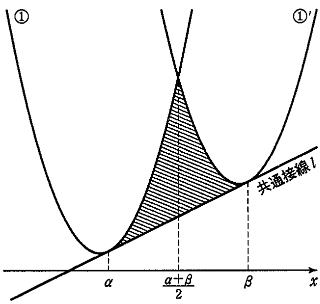
で表される2つの放物線と共通接線 l を考える．共通接線と①，①′の接点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする．①と①′の交点の x 座標は

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ……②

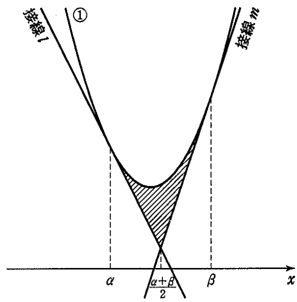
となり，①，①′および l で囲まれた部分の面積は

$\dfrac{|a|(\beta-\alpha)^3}{12}$ ……③

になる．



公式2． $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ における①の接線をそれぞれ l，m とする．すると l と m の交点の x 座標は②であり，①と l，m で囲まれた部分の面積は③である．



2．公式の証明

1．の公式を証明するために先ず次の問題1を考える．

問題1． 2つの2次関数

$y=(x-\alpha)^2$，$y=(x-\beta)^2$　$(\alpha<\beta)$

で表される放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

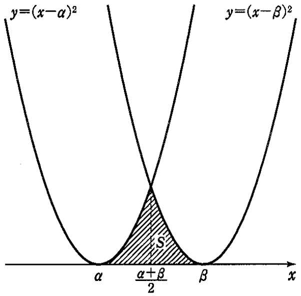
解． グラフの対称性から，交点の x 座標は②になる．

$$S=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx \quad \cdots\cdots ④$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}-\frac{(\alpha-\beta)^3}{24}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12} \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる．■

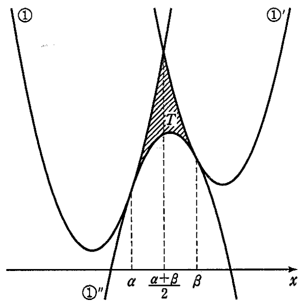


次に3つの2次(以下の)関数①，①′ および

$$y=dx^2+ex+f \qquad \cdots\cdots ①''$$

を用意する．a と d は異なり同時に0になることはなく，b と b'は異なるとする．すると①と①′ は交わることになる．また①と①″，①′ と①″ はそれぞれ x 座標が α，β $(\alpha<\beta)$ の点で接するとする．

このとき，①，①′，①″ で囲まれる部分の面積 T を求める．



①と①″ は $x=\alpha$ の点で接するので，2次方程式①−①″=0 は重解 $x=\alpha$ をもつ．したがって

$$ax^2+bx+c-(dx^2+ex+f)$$
$$=(a-d)(x-\alpha)^2 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

と因数分解される．同様に

$$ax^2+b'x+c'-(dx^2+ex+f)$$
$$=(a-d)(x-\beta)^2 \qquad \cdots\cdots ⑥'$$

と表される．①と①′の交点の x 座標は

①−①′=0　すなわち　⑥−⑥′=0

の解である．したがって

$$(a-d)\{(x-\alpha)^2-(x-\beta)^2\}=0,$$
$$(a-d)(2x-\alpha-\beta)(\beta-\alpha)=0$$

となって，$a\neq d$，$\alpha\neq\beta$ だから，x は②と同じ $\frac{\alpha+\beta}{2}$ となる．

面積 T は，式が①−①″，①′−①″ すなわち，⑥，⑥′ で表される関数を，それぞれ $\alpha\leqq x\leqq\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\frac{\alpha+\beta}{2}\leqq x\leqq\beta$ の範囲で積分した値の絶対値に等しいので，④の積分の $|a-d|$ 倍となって，⑤の結果から

$$\frac{|a-d|(\beta-\alpha)^3}{12} \qquad \cdots\cdots ③'$$

となる．

公式1は $d=0$ の場合，公式2は $a=0$ とし，d を改めて a とした場合である．■

3. 放物線の接線の公式

⑥で $a\neq0$，$d=0$ とすると

$$ax^2+bx+c-(ex+f)=a(x-\alpha)^2$$

となる．これは，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=ex+f$ が $x=\alpha$ の点で接することを表している．この式を

$$ex+f=ax^2+bx+c-a(x-\alpha)^2$$

と変形することによって，放物線の接線の公式が示される．

公式3． 放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上 $x=\alpha$ における点の接線の方程式は

$$y=ax^2+bx+c-a(x-\alpha)^2$$

で与えられる．

4. 面積の計算法

以上の公式を利用して大学入試問題を考えてみる．

問題2． (1)　2曲線 $y=x^2+x-1$，$y=x^2-9x+24$ の共通接線の方程式を求めよ．

(2)　このとき2曲線と共通接線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(室蘭工業　02年(問題の表現を変えた.))

解答． (1)　接点の x 座標をそれぞれ α，β とすると，接線の方程式は公式3から

$$y=x^2+x-1-(x-\alpha)^2$$
$$=(2\alpha+1)x-(\alpha^2+1),$$
$$y=x^2-9x+24-(x-\beta)^2$$
$$=(2\beta-9)x-(\beta^2-24)$$

で与えられる．これらが一致するので

$$2\alpha+1=2\beta-9,\ \alpha^2+1=\beta^2-24$$

となり，

$\beta=\alpha+5$ を $\alpha^2-\beta^2+25=0$

に代入すると

$-10\alpha=0$ から $\alpha=0$，$\beta=5$

となる．共通接線の方程式は

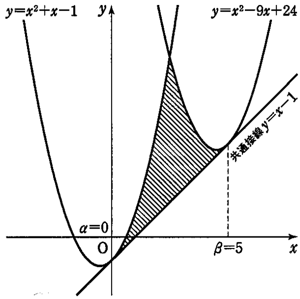
$y=x-1$

である．

(2)　求める面積は，公式 1 から

$\dfrac{5^3}{12}=\dfrac{125}{12}$

である．■



問題 3． 曲線 $C：y=x^2+4$ 上の点 A $(2,\ 8)$ における C の接線を l_1 とするとき次の問いに答えよ．

(1)　P を A と異なる l_1 上の点とし，P の x 座標を a とする．P を通って曲線 C と接する l_1 以外の直線 l_2 の方程式を a を用いて表せ．

(2)　2 つの直線 l_1，l_2 および曲線 C で囲まれた図形の面積が $\dfrac{1}{12}$ となる点 P を求めよ．

（信州大学　02 年）

解答． (1)　接線 l_1 の方程式は，公式 3 から

$y=x^2+4-(x-2)^2=4x$

であるから，点 P の座標は $(a,\ 4a)$ となる．曲線 C と直線 l_2 の接点の x 座標を β とすると，l_2 の方程式は再び公式 3 から

$y=x^2+4-(x-\beta)^2=2\beta x+4-\beta^2$

となる．この直線が点 $\mathrm{P}(a,\ 4a)$ を通るので

$4a=2a\beta+4-\beta^2$ から

$\beta^2-2a\beta+4(a-1)=0$,

$(\beta-2)\{\beta-2(a-1)\}=0$

となり，$\beta\neq 2$ であるから $\beta=2(a-1)$ となり l_2 の方程式は

$y=4(a-1)x+8a-4a^2$

である．

(2)　l_1，l_2 および曲線 C で囲まれた図形の面積は，公式 2 から

$\dfrac{|2(a-1)-2|^3}{12}=\dfrac{|2a-4|^3}{12}$

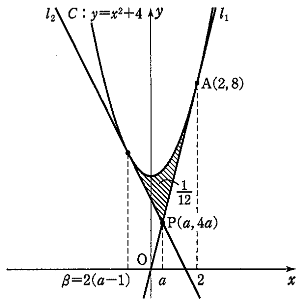
となり，これが $\dfrac{1}{12}$ になるので

$|2a-4|=1$ から $a-2=-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$

となって

$a=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$

となる．■



おわりに

生徒諸君には，公式に操られるのではなく，公式を操ることを心掛けさせたい．そのためには，公式を導いた考え方や方法を学びとり，自分なりに考え直させることが大切であろう．本教材はその一例になっているように思う．

御意見等頂ければ幸いです．

（福岡県明治学園高等学校）