3つの漸化式の同値性について

石濱（いしはま）　文武（ふみたけ）

§1. はじめに

高校数学に頻出する3種の数列の漸化式が，実は互いに同値であることを注意したいと思います．3種の漸化式とは，ある種の2項間漸化式，多項間線型漸化式，連立線型漸化式です．

また，2つの漸化式が同値であるとは，共通の初期値の下で2つの漸化式が定める数列が一致することをいいます．

§2. 命題

[命題1] 適当な共通の初期値 a_1, a_2 が与えられたとき，次の3つの漸化式[A], [B], [C]で定まる数列 $\{a_n\}$ は一致する．

[A] $a_{n+1}=\alpha a_n+k\beta^n$

[B] $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

[C] $\begin{cases} a_{n+1}=p_{11}a_n+p_{12}b_n \\ b_{n+1}=p_{21}a_n+p_{22}b_n \end{cases}$

(ただし，係数行列 $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ の固有値は α, β であるとする.)

また，α, β は異なり，α, β, k は0でないとする．

[命題2] 適当な共通の初期値 a_1, a_2, a_3 が与えられたとき，次の3つの漸化式[A], [B], [C]で定まる数列 $\{a_n\}$ は一致する．

[A] $a_{n+1}=\alpha a_n+k\beta^n+l\gamma^n$

[B] $a_{n+3}-(\alpha+\beta+\gamma)a_{n+2}+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)a_{n+1}$
$-\alpha\beta\gamma a_n=0$

[C] $\begin{cases} a_{n+1}=p_{11}a_n+p_{12}b_n+p_{13}c_n \\ b_{n+1}=p_{21}a_n+p_{22}b_n+p_{23}c_n \\ c_{n+1}=p_{31}a_n+p_{32}b_n+p_{33}c_n \end{cases}$

(ただし，係数行列の固有値は α, β, γ であるとする.)

また，α, β, γ は互いに異なり，α, β, γ, k, l は0でないとする．

[証明] [命題1]

(初期値について) a_1 は任意に定める．この a_1 に対して，[A]の $\{a_n\}$ はただ1つ確定する．a_2 は[A]を満たさなければならないので $a_2=\alpha a_1+k\beta$ と定める．この a_1, a_2 に対して[B]の $\{a_n\}$ はただ1つ確定する．[C]は次に述べるように b_n を消去すると[B]と同値になるので，[C]の $\{a_n\}$ もただ1つ確定する(なお，その $\{a_n\}$ から $\{b_n\}$ が定まる).

([A]と[B]の同値性)

[K] $a_n=p\alpha^{n-1}+q\beta^{n-1}$,

$$p=a_1-\frac{k\beta}{\beta-\alpha},\quad q=\frac{k\beta}{\beta-\alpha}$$

とおく．この $\{a_n\}$ が[A], [B]で定まる $\{a_n\}$ と一致することが直接計算により分かる．したがって，上に述べた唯一性により[A], [B]は[K]と同値すなわち[A], [B]は同値である．

([B]と[C]の同値性)

[C]で b_n を消去すると

[C′] $a_{n+2}-(p_{11}+p_{22})a_{n+1}$
$+(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})a_n=0$

となる．ところで行列 P の固有方程式は

$$t^2-(p_{11}+p_{22})t+(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})=0$$

であるが仮定によりこの方程式の解(固有値)が α, β であるから

$$\mathrm{tr}P=p_{11}+p_{22}=\alpha+\beta,$$
$$\det P=p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}=\alpha\beta$$

となって，[C′]で定まる $\{a_n\}$ は[B]で定まる $\{a_n\}$ と一致する．

[命題2]についても同様である．　**(証明終)**

§3. 例

[例1] $a_1=-2$, $a_2=-16$

[A] $a_{n+1}=2a_n-4\cdot 3^n$

[B] $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

[C] $\begin{cases} a_{n+1}=a_n-b_n \\ b_{n+1}=2a_n+4b_n \end{cases}$

のとき，[A]，[B]，[C] で定まる数列 $\{a_n\}$ はいずれも

[K]　$a_n=5\cdot2^n-4\cdot3^n$

で定まる数列 $\{a_n\}$ と一致する．

[例 2]　$a_1=6$，$a_2=30$，$a_3=132$

[A]　$a_{n+1}=-a_n+3\cdot2^n+6\cdot5^n$

[B]　$a_{n+3}-6a_{n+2}+3a_{n+1}+10a_n=0$

[C]　$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n-2b_n \\ b_{n+1}=-2a_n+2b_n-2c_n \\ c_{n+1}=-b_n+c_n \end{cases}$

のとき，[A]，[B]，[C] で定まる数列 $\{a_n\}$ はいずれも

[K]　$a_n=(-1)^n+2^n+5^n$

で定まる数列 $\{a_n\}$ と一致する．

§4. おわりに

§2 の (証明) では，天下り式に一般項 a_n を示し解の一意性を利用しましたが，ここでは [例 2] [A] について a_n の 1 つの求め方を示します．

(解)　$a_1=6$，$a_2=30$，$a_3=132$

[A]　$a_{n+1}=-a_n+3\cdot2^n+6\cdot5^n$

まず，補助の数列 $\{h_n\}$ を

$$h_n=s\cdot2^n+t\cdot5^n$$

とおいて，これが

$$h_{n+1}=-h_n+3\cdot2^n+6\cdot5^n$$

を満たすように s，t を定めると

$$h_n=2^n+5^n$$

となる．

$a_{n+1}-h_{n+1}=-(a_n-h_n)$，$a_1-h_1=-1$ より

$$a_n-h_n=(-1)^n$$

$$a_n=(-1)^n+h_n=(-1)^n+2^n+5^n$$　**(解終)**

この解法は [例 1] [A] にも使える普遍性のある方法です．通常，両辺を 3^{n+1} で割る方法が知られていますが，[例 2] には使えません．

最後に，本稿で扱った数列の第 n 項はいずれも

固有値の n 乗の線型結合

の形であることに注意したいと思います．

(神奈川県立湘南高等学校)