3次関数の指導について
～変曲点を用いた解法の指導～

横山（よこやま）　政道（まさみち）

数学Ⅲで出てくる変曲点を用いることで，解答に見通しがつき容易に解答できる問題は多い．その中でも接線の本数の問題では，凹凸の境目の特性をいかしてその威力を十分に発揮し，その3次関数のグラフと変曲点における接線を作図するだけで直観的に処理できる．その他，接線とで囲まれる図形の面積の問題や3次関数のグラフと直線で囲まれた図形の面積に関する問題などがある．そこで，変曲点を用いると簡単に解ける問題をいくつか紹介する．

◎『変曲点と交点の関係』

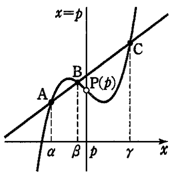
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ……①

$y=mx+n$ ……②

①と②の差の関数 $y=f(x)-(mx+n)$ を作る．

①と②が $x=\alpha$，β，γ の3点で交わるとすると

$$f(x)-(mx+n)$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+\cdots\cdots\} \quad \cdots\cdots ③$$



一方，上図のように点P(p)を3次関数①の変曲点とすると，

$$f(x)=a(x-p)^3+(x\text{ の1次以下の項})$$
$$\therefore\ f(x)-(mx+n)$$
$$=a(x-p)^3+(x\text{ の1次以下の項})$$
$$=a(x^3-3px^2+\cdots\cdots)+(x\text{の1次以下の項}) \quad \cdots\cdots ④$$

となるので，③と④の2次の係数を比べて，

$$3p=\alpha+\beta+\gamma$$

すなわち　$p=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

性質①

3次関数 $y=f(x)$ と直線 $y=mx+n$ の交点の x 座標を α，β，γ，$y=f(x)$ の変曲点Pの x 座標を p とするとき　$p=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

（3交点の重心は，直線のひき方に関係なく一定の直線 $x=p$ 上にある.）

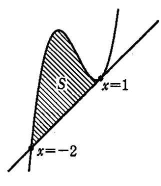
【例題1】 $y=x^3-2x$ とその曲線上の点 $(1,\ -1)$ における接線とで囲まれる図形の面積を求めよ．

〔解答1〕 標準解答

$$y'=3x^2-2$$

$x=1$ における接線の傾きは $y'=1$ であるから，接線の方程式は

$$y=x-2$$



残りの交点の x 座標は，

$$x^3-2x=x-2$$
$$(x-1)^2(x+2)=0$$

これを解いて，残りの x 座標は

$$x=-2$$

したがって，求める面積は

$$S=\int_{-2}^{1}\{(x^3-2x)-(x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{27}{4}$$

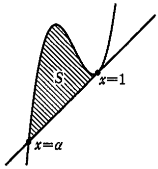
〔解答 2〕 変曲点利用

$y'=3x^2-2,\quad y''=6x$

$y''=0$ を解くと　$x=0$

残りの交点の x 座標を α とすると

$$\underbrace{\frac{\alpha+1+1}{3}=0}_{\boxed{\text{性質①}}}$$



$\therefore\quad \alpha=-2$

したがって，面積 S は

$$S=\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^2dx=\frac{(1+2)^4}{12}=\frac{27}{4}$$

※ $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$ を利用．

（証明は省略）

性質②

3 次関数のグラフとその変曲点を通る直線で囲まれる 2 つの部分の面積は等しい．

【例題 2】 直線 $y=ax$ と曲線 $y=x^3-6x^2+9x$ とで囲まれた 2 つの部分の面積が一致するとき，定数 a の値を求めよ．ただし，$0<a<3$ とする．

〔解答 1〕 標準解答

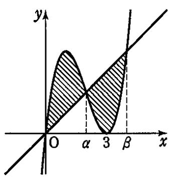
交点の x 座標を求める．

$x^3-6x^2+9x=ax$

$x(x^2-6x+9-a)=0$

$0<a<3$ であるから

$x=0,\ 3\pm\sqrt{a}$



$\alpha=3-\sqrt{a}$,

$\beta=3+\sqrt{a}$

とおくと，右上図の 2 つの斜線部分の面積が等しくなるための条件は

$$\int_0^\alpha(x^3-6x^2+9x-ax)dx$$
$$=\int_\alpha^\beta\{ax-(x^3-6x^2+9x)\}dx$$

これより　$\displaystyle\int_0^\beta(x^3-6x^2+9x-ax)dx=0$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9-a}{2}x^2\right]_0^\beta$$
$$=\frac{1}{4}\beta^2(\beta^2-8\beta+18-2a)=0$$

$\beta>0$ より　$\beta^2-8\beta+18-2a=0$

$\beta=3+\sqrt{a}$ を代入して整理すると

$3-a-2\sqrt{a}=0$

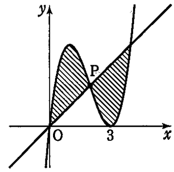
すなわち　$3-a=2\sqrt{a}$ …… ①

両辺を 2 乗して整理すると　$(a-1)(a-9)=0$

$0<a<3$ より　$a=1$ （これは①を満たす）

〔解答 2〕 変曲点利用

変曲点 P の座標を求める．



$y'=3x^2-12x+9$

$y''=6x-12$

$y''=0$ を解いて

$x=2$

よって，点 P の座標は

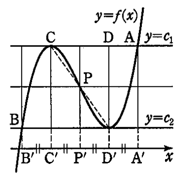
$(2,\ 2)$

2 つの面積が等しくなるのは，直線 $y=ax$ が変曲点 P を通るときであるから，$x=2,\ y=2$ を $y=ax$ に代入して　$2=2a$　　$\therefore\quad a=1$

（これは $0<a<3$ を満たす）

性質③

3 次関数 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=c_1$，$y=c_2$（c_1 は極大値，c_2 は極小値）の交点を A，B，極大値，極小値をとる点を C，D とし，x 軸に下ろした垂線の足を B′，C′，P′，D′，A′ とすると



$$\mathrm{B'C'}=\mathrm{C'P'}=\mathrm{P'D'}=\mathrm{D'A'}$$

【例題 3A】 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は次の条件(イ)，(ロ)を満たしている．

(イ) $y=f(x)$ のグラフは，点 $(0,\ 1)$ に関して点対称である．

(ロ) $y=f(x)$ は相異なる 2 つの極値をもち，2 つの極値の差の絶対値は 4 に等しい．

(1) $y=f(x)$ のグラフは x 軸と相異なる 3 点で交わることを示せ．

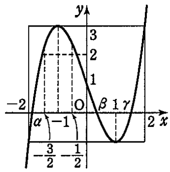
(2) (1)における 3 点の x 座標を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$（ただし，$\alpha<\beta<\gamma$ とする）とおくとき，

$f\left(\dfrac{-\beta-\gamma}{2}\right)>2$ を示せ．　　（2000年 京大）

〔解答〕 (1) 略

(2) (1)より　$f(x)=x^3-3x+1$

性質③より右図のようになり，



$0<\beta<1$

$1<\gamma<2$

$\frac{1}{2}<\frac{\beta+\gamma}{2}<\frac{3}{2}$ より

$-\frac{3}{2}<\frac{-\beta-\gamma}{2}<-\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{17}{8}>2$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{8}>2$

よって　$f\left(\frac{-\beta-\gamma}{2}\right)>2$

【例題 3B】 a，b，c を実数とする．$y=x^3+3ax^2+3bx$ と $y=c$ のグラフが相異なる3つの交点をもつという．このとき，$a^2>b$ が成立することを示し，さらにこれらの交点の x 座標のすべては開区間

$$(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b})$$

に含まれていることを示せ．

(2002年 京大)

〔解答〕 $y=x^3+3ax^2+3bx$ …… ① と $y=c$ のグラフが相異なる3つの交点をもつとき，①は極値をもつ．よって，$y'=0$ が異なる2つの実数解をもつ．

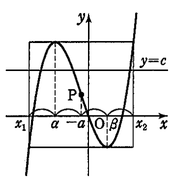
$y'=3(x^2+2ax+b)=0$ …… ② より

$a^2-b>0$　　$\therefore$　$a^2>b$

このとき，②の解を α，β とおくと

$\alpha=-a-\sqrt{a^2-b}$,

$\beta=-a+\sqrt{a^2-b}$



また，変曲点Pの x 座標は，$y''=6x+6a=0$ より

$x=-a$

性質③と右図より

$\frac{-a+x_2}{2}=-a+\sqrt{a^2-b}$

$\therefore$　$x_2=-a+2\sqrt{a^2-b}$

$\frac{-a+x_1}{2}=-a-\sqrt{a^2-b}$

$\therefore$　$x_1=-a-2\sqrt{a^2-b}$

よって，交点の x 座標は開区間 $(x_1,\ x_2)$ にある．

性質④

曲線へ引ける接線の本数は，その曲線，変曲点での接線を境界にして変化する．

【例題 4 A】 $y=x^3+1$ のグラフに，3本の接線が引けるような点の存在範囲を求めよ．

〔解答1〕 標準解答

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ t^3+1)$ における接線の方程式は　$y=3t^2(x-t)+(t^3+1)$

すなわち　$y=3t^2x-2t^3+1$

t について整理すると

$2t^3-3xt^2+y-1=0$　…… ①

①の左辺$=g(t)$ とするとき

3本の接線が引ける条件

$\iff$ 方程式①が異なる3個の実数解をもつ．

$\iff$ $g(t)$ が極大値と極小値をもち，

しかも極大値×極小値<0

$g'(t)=6t^2-6xt=6t(t-x)$ なので

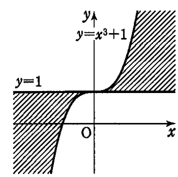
$g(0)g(x)<0$

$(y-1)(-x^3+y-1)<0$

すなわち

$$\begin{cases} y>1 \\ y<x^3+1 \end{cases}$$

または $$\begin{cases} y<1 \\ y>x^3+1 \end{cases}$$



図示すると，右図の斜線部分で境界線を含まない．

〔解答2〕 変曲点利用

〔考え方〕 グラフを変曲点で区切って上に凸な部分と下に凸な部分に分け，それぞれについて接線を引ける本数を出してから足し合わせる．なお，境界線や変曲点については，別個に数える．

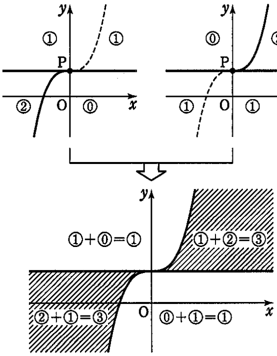
$y=x^3+1$，$y'=3x^2$，$y''=6x$

$y''=0$ を解いて　$x=0$

変曲点Pの座標は　$\mathrm{P}(0,\ 1)$

また，点Pにおける接線の方程式は，傾き $y'=0$ より　$y=1$

上に凸と下に凸な部分に分けて接線の数を求めると



求める点の存在範囲は，上図の斜線部分で境界線は含まない。

※このように変曲点で区切って接線の本数を求めていく方法は，3次関数に限らずいろいろな関数で使えて，接線の本数を問う問題のほとんどに威力を発揮する。

※境界線になり得るのは，もとの曲線，変曲点での接線，漸近線である。

【例題 4 B】 C は曲線 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ とする。x 軸上の点 $(0,\ k)$ から曲線 C へ3本の接線が引けるような k の値の範囲を求めよ。

〔**解答 1**〕 標準解答

$$f'(x)=x^2-4x+3$$

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(t^2-4t+3)(x-t)+\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t+1$$

すなわち　$y=(t^2-4t+3)x-\frac{2}{3}t^3+2t^2+1$

点 $(0,\ k)$ を通る条件は

$$k=-\frac{2}{3}t^3+2t^2+1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\begin{cases} y=k & \cdots\cdots ② \\ y=-\frac{2}{3}t^3+2t^2+1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

3本の接線が引ける条件

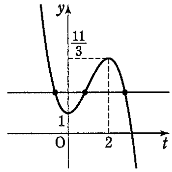
$\Longleftrightarrow$ 方程式①が異なる3個の実数解をもつ。

$\Longleftrightarrow$ ②と③のグラフが3点で交わる。

3点で交わる k の値の範囲は下のグラフより

$$1<k<\frac{11}{3}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	1	↗	$\frac{11}{3}$	↘



〔**解答 2**〕 変曲点利用

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$$

$$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

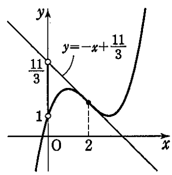
$$f''(x)=2x-4=2(x-2)$$

$f(x)$ の増減表

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗

y 軸上の点 $(0,\ k)$ から3本の接線が引けるような k の値の範囲は，右のグラフから

$$1<k<\frac{11}{3}$$



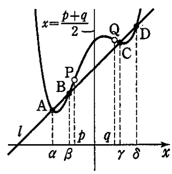
性質①を4次関数に広げると次のようなことがいえます。

4次関数 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ と直線 l の交点を A，B，C，D，変曲点を点 P，Q とし，それぞれの x 座標を右図のようにおくとき，

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}=\frac{p+q}{2}$$

が成り立つ。

（4交点の重心は，直線のひき方に関係なく一定の直線 $x=\frac{p+q}{2}$ 上にある。）



〔例題５〕 $y=x^4-8x^2+2x+20$ を C とする．直線 l は曲線 C 上の異なる２点で C に接するものとする．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．また，C と l で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) 直線 l 上の点Ｐから曲線 C に接線を引く．このとき，l と異なる接線が１本だけ引けるような点Ｐの座標をすべて求めよ．

(2001年 徳島大)

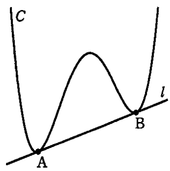
〔解答〕 (1) $f(x)=y=x^4-8x^2+2x+20$

$$y'=4x^3-16x+2$$

$$y''=12x^2-16=12\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$y''=0$ を解くと

$$x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$



２接点Ａ，Ｂの x 座標を x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ とおくと，変曲点と交点の関係から次の式が成り立つ．

$$\frac{2x_1+2x_2}{4}=\frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}$$

よって　$x_2=-x_1$ …… ①

２接点における傾きはそれぞれ $f'(x_1)$，$f'(x_2)$ で相等しいから

$$f'(x_1)=f'(x_2)$$

①より　$f'(x_1)=f'(-x_1)$

計算すると

$$4x_1^3-16x_1+2=-4x_1^3+16x_1+2$$

$$x_1(x_1^2-4)=0 \qquad \therefore\ x_1=0,\ \pm2$$

よって，条件に合う２接点の座標は

$$A(-2,\ 0),\quad B(2,\ 8)$$

よって，直線 l の方程式は　$y=2x+4$

また，C と l で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_{-2}^{2}\{(x^4-8x^2+2x+20)-(2x+4)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x+2)^2(x-2)^2dx=\frac{(2+2)^5}{30}=\frac{512}{15}$$

※ $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx=\frac{(\beta-\alpha)^5}{30}$ を利用．

(証明は省略)

(2) 変曲点Ｐ，Ｑにおける接線の方程式を求める．

$x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$y'=\frac{64\sqrt{3}}{9}+2,\quad y=\frac{100}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

よって，点Ｐにおける接線の方程式は

$$y=\left(\frac{64\sqrt{3}}{9}+2\right)x+\frac{228}{9} \quad \cdots\cdots ②$$

残りの変曲点Ｑにおける接線の方程式を求める．

$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$y'=-\frac{64\sqrt{3}}{9}+2,\quad y=\frac{100}{9}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

よって，点Ｑにおける接線の方程式は

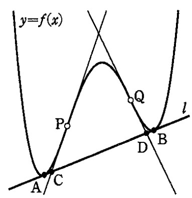
$$y=\left(-\frac{64\sqrt{3}}{9}+2\right)x+\frac{228}{9} \quad \cdots\cdots ③$$

直線 $y=2x+4$ 上の点で l 以外の異なる接線が１本だけ引ける点は，２接点Ａ，Ｂと変曲点における接線と直線 l の交点Ｃ，Ｄの４点である．

直線 l と②（または③）と連立させて，点Ｃ，Ｄの座標は

$$C(-\sqrt{3},\ -2\sqrt{3}+4),\quad D(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}+4)$$

求める点は，(1)より $A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 8)$ も入れて４点．



〈参　考　文　献〉

大学への数学　「数学ショートプログラム」(東京出版)

大学への数学　「問題はどう作られるか」(東京出版)　栗田稔 著

(宮崎県立宮崎南高等学校)