数列の和の計算方法について

中原（なかはら）　克芳（かつよし）

はじめに

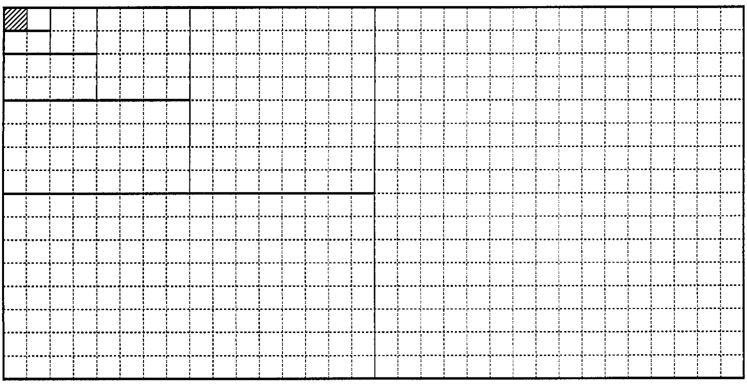
数列の和の計算は，昔から数多くの方が様々な方法を考えている．最近の「数研通信」でも，No.42には村上先生が $\sum_{k=1}^{n} k^2$ の，また No.44 には石原先生が $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の計算方法を紹介されている．しかし残念なことに，先の2つの話題は既に知られた事実であった．とは言っても，自分で数学を研究し新しい発見をすることは，例えそれが先人が既に見い出したことではあっても，素晴らしいことに違いない．その1つの理由として，教師が数学の楽しみ方を再確認できることがある．そのため，直接授業に役に立たないような研究であっても，その楽しむ姿勢はきっと授業に活かされる．恐らく先の両先生もその例に漏れず，その授業を受ける生徒は幸せなことであろう．

さて，私も様々な研究をしているが，先人の知恵を再発見することも幾度か経験している．今回私が紹介する数列の和の計算方法も既に誰かが研究・発表していることかも知れない．しかし自分で文献を調べたり，何人かに話したところ，初見であるとのことであった．そこで今回「数研通信」を通して全国の先生方に紹介する次第である．これらの方法についてご存じの方があればお教えいただきたい．

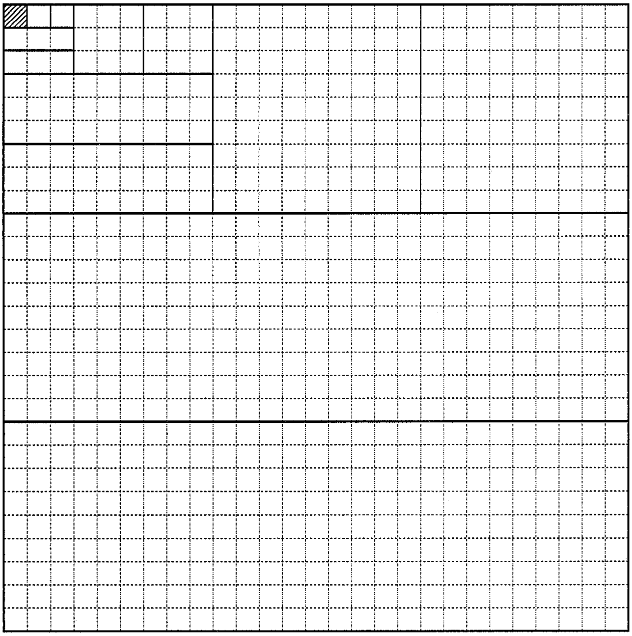
〔I〕 $\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ の図表示

等比数列の和を表す公式を図示する方法は有名ではあるが，ご存じない方もおられるであろうから，下に公比 r がそれぞれ 2，3 の場合を図示しておこう．

(i) $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}=2^n-1$ の図表示



(ii) $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} = \frac{3^n - 1}{2}$ の図表示



この図は初項が 2 の場合であるので，全体を 2 で割れば上の等式が得られる．

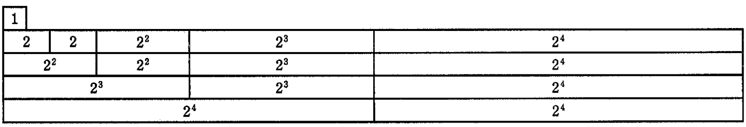
さて，先の図を参考にして，r^0 が 1 個，r^1 が 2 個，r^2 が 3 個，r^3 が 4 個，…… のような数列の和を表す等式

$$\sum_{k=1}^{n} k r^{k-1} = \frac{n r^{n+1} - (n+1) r^n + 1}{(1-r)^2}$$

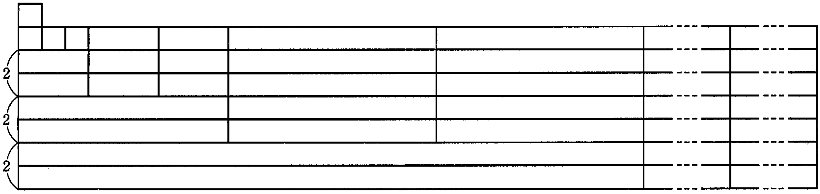
を図を使って表示してみよう．

それには最初に面積 1 の正方形を 1 つ置き，それに横長の長方形を次々に付け加えていけばよい．ここで，$r=2$ のときは右辺の分母が 1 であるが，$r=3$ のときは分母が $2^2=4$，$r=4$ のときは $3^2=9$ であるので，その倍数分だけ長方形を置いていけばよい．

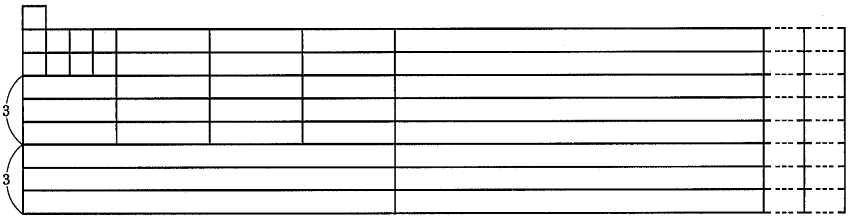
$r=2$ のとき　$1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}=(n-1)2^n+1$



$r=3$ のとき　$1+2\cdot3+3\cdot3^2+4\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}=\dfrac{(2n-1)3^n+1}{4}$



$r=4$ のとき　$1+2\cdot4+3\cdot4^2+4\cdot4^3+\cdots\cdots+n\cdot4^{n-1}=\dfrac{(3n-1)4^n+1}{9}$



〔II〕 組合せ的手法を用いた $\sum_{k=1}^{n}k^r$ の計算法

最初に書いたように，最近の「数研通信」にも $\sum_{k=1}^{n}k^2$，$\sum_{k=1}^{n}k^3$ の計算方法が紹介されている．ここでは組合せ的手法を用いた証明方法を紹介しよう．まずは $\sum_{k=1}^{n}k^2$ で説明する．

A，B，Cの3人が，それぞれ0から n までの整数が1つずつ書かれた $n+1$ 枚の札を持ち，これらをよく切って1枚だけ場に出し，その数値が最も大きいものが勝つというゲームをした．札の出し方は3人が $n+1$ 通り出せる重複順列なので $(n+1)^3$ 通り．また，このゲームの結果のパターンは，

(1) A，B，Cのうちの誰かの1人勝ち，

(2) 2人の数値が等しく，それが残りの1人の数値より大きい（2人勝ち），

(3) 3人の出した数値が全く一致する（引き分け……3人勝ち），

のいずれかである．それぞれの総数を求めていこう．

(3)のパターンの総数は，3人が0，1，2，3，……，$n-1$，n のどれかを出すから $n+1$ 通り．

(2)のパターンとしては，① A，Bが一致しCの1人負けの場合，② B，Cが一致しAの1人負けの場合，③ C，Aが一致しBの1人負けの場合，の3通りがある．どの場合も同様なので，①の場合について考えよう．A，Bが k $(k\geqq1)$ を出したときのCの負け方は $k-1$ 以下の数を出す k 通り．A，Bが共に0を出した場合はCは最悪引き分けのため，Cの負けはありえない．したがって①の場合の数は

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

なので，(2)のパターンの総数は3倍して，

$\dfrac{3}{2}n(n+1)$ 通りとなる．

最後に(1)のパターンを調べよう．やはりAが1人勝ちのときを考える．Aが k $(k\geqq1)$ を出したときはB，Cは $k-1$ 以下の数を出せばよいので重複順列で k^2 通り．Aが0を出した場合はAは勝てない．BまたはCの1人勝ちの場合も同様なので，結局(1)のパターンの総数は $3\sum_{k=1}^{n}k^2$ 通りとなる．

これらの結果から平方数の和の公式を導こう．札を出す総数が $(n+1)^3$ で，これが(1)，(2)，(3)の総和と一致するので，

$$(n+1)^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3}{2}n(n+1)+(n+1)$$

が成り立つ．これを $\sum_{k=1}^{n}k^2$ について解けば，

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n+1}{3}\left\{(n+1)^2-\frac{3}{2}n-1\right\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が得られる．

今は 3 人の場合で考えたが，一般に $r+1$ 人の場合について同様に考えれば，札の出し方の総数は $(n+1)^{r+1}$ 通り．そして 1 人勝ちはその人の組合せが ${}_{r+1}C_1$ 通りで，勝者が出した札の数字が k のとき他の人の札の出し方が k^r 通り，2 人勝ちではそれぞれ ${}_{r+1}C_2$ 通りと k^{r-1} 通り，3 人勝ちでは ${}_{r+1}C_3$ 通りと k^{r-2} 通り，……，r 人勝ちは ${}_{r+1}C_r$ 通りと k 通り，$r+1$ 人勝ち（引き分け）は札の出し方が $n+1$ 通り，となるので，

$$(n+1)^{r+1}={}_{r+1}C_1\sum_{k=1}^{n}k^r+{}_{r+1}C_2\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}$$
$$+{}_{r+1}C_3\sum_{k=1}^{n}k^{r-2}+\cdots\cdots$$
$$+{}_{r+1}C_r\sum_{k=1}^{n}k+(n+1)$$

から $\sum_{k=1}^{n}k^r$ を計算することができる．

なお，上の式の右辺の最後の項 $n+1$ の 1 を左辺に移項すれば，教科書でおなじみの階差数列の恒等式 $(k+1)^r-k^r$ の和を取ったものが現れる．すなわちこの計算方法は，階差数列の恒等式による証明の具体例とも言える（一般の場合の計算方法と，最後の文の指摘は札幌啓成高校の成田收先生に教えていただきました）．

（広島女学院中学校・高等学校）