不等式の証明の統一的方法

仁平（にへい） 政一（まさかず）

1. はじめに

「不等式の証明」は高校生が最も苦手とする分野の１つである．その原因の１つは，「不等式を証明」するための統一的方法がなく，問題ごとにそれぞれ工夫を必要とするからである．

例えば，不等式

$$a^2+b^2 \geqq 2ab \quad (a,\ b \text{ は実数})$$

を証明するためには，

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$$

という工夫が必要であり

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca \quad (a,\ b,\ c \text{ は実数})$$

を証明するためには，より複雑な式の変形

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

を必要とする ([2])．

これらのことからわかるように，「不等式の証明」には，２次方程式を解の公式を用いて解くような，統一的方法は，知られていない．

統一的方法がなく，機械的に証明することができないことこそ，「不等式の証明」の醍醐味であり，そこに「論理的な思考力を養う」教材 ([3]) としての教育的価値があるということについては論をはさむ余地はない．しかし，多くの生徒が「不等式の証明」の面白さを味わう前に，「不等式の証明」に興味を失ってしまうという現実も見逃すことはできない．

そこで，本稿では，完全平方式等を用いない，新しい証明方法を導入することで，上記の２つの不等式を含むいくつかの不等式が，簡単にしかも統一的に証明できることを示す．

2. 準備

ここでは，新しい証明方法を述べるためにいくつかの準備を行う．

最初に記号の約束をする．

定義　実数 a，b に対して

$$\langle a,\ b\rangle=a+b$$

と定義する．

この約束から，次の基本性質がただちに得られる．

基本性質

(1) $\langle a,\ b\rangle+\langle c,\ d\rangle=\langle a+c,\ b+d\rangle$

(2) $\langle a,\ b\rangle-\langle c,\ d\rangle=\langle a-c,\ b-d\rangle$

(3) $k\langle a,\ b\rangle=\langle ka,\ kb\rangle$

(4) $\langle a,\ b\rangle=\langle b,\ a\rangle$

(5) $\langle \sum_{i=1}^{n} a_i,\ \sum_{i=1}^{n} b_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle a_i,\ b_i\rangle$

次に定理を１つ準備する．

定理１　$A \geqq a$，$B \geqq b$ のとき，

$$AB+ab \geqq Ab+aB$$

等号は $A=a$ あるいは $B=b$ のとき成り立つ．

証明　$AB+ab-Ab-aB$

$$=A(B-b)-a(B-b)$$
$$=(A-a)(B-b) \geqq 0$$

よって，定理は証明された．□

定理１の内容を上記の記号を用いて表すと，次の系１が得られる．

系１　$A \geqq a$，$B \geqq b$ のとき，

$$\langle AB,\ ab\rangle \geqq \langle Ab,\ aB\rangle$$

等号は $A=a$ あるいは $B=b$ のとき成り立つ．

一般に，$\langle a,\ b\rangle=\langle b,\ a\rangle$ が成り立つから $A \geqq a$，$B \geqq b$ のとき　$\langle AB,\ ab\rangle \geqq \langle aB,\ Ab\rangle$，$\langle ab,\ AB\rangle \geqq \langle Ab,\ aB\rangle$ も成り立つ．

さて系１で $\langle Ab,\ aB\rangle$ は $\langle AB,\ ab\rangle$ の文字の入れ替えと見なすことができる．

そこで，$A \geqq a$，$B \geqq b$ という条件の下で，系１の不等式が成り立つような文字の入れ替えを行うことを，今後「基本操作を施す」と呼ぶことにする．本稿ではこの基本操作を用いて不等式を証明する．

3. 初等的ないくつかの不等式

第1節で取り上げた2つの不等式

(1)　$a^2+b^2 \geqq 2ab$　(a, b は実数)

(2)　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$　(a, b, c は実数)

を「基本操作」を用いて証明してみよう．

(1), (2)とも，文字を入れ替えても不等式は変わらないから，(1)では $a \geqq b$, (2)では $a \geqq b \geqq c$ と仮定してよい．

不等式 (1) の証明.

$$a^2+b^2=\langle a^2,\ b^2\rangle=\langle aa,\ bb\rangle$$

$a \geqq b$ と仮定してあるから，基本操作を施して

$$\langle aa,\ bb\rangle \geqq \langle ab,\ ba\rangle$$

が得られる．このことより

$$\langle a^2,\ b^2\rangle \geqq \langle ab,\ ba\rangle$$

を得る．よって，

$$a^2+b^2 \geqq 2ab$$

が示された．等号は，系1より，$a=b$ のとき成り立つことがわかる．□

不等式 (2) の証明.

(1)の場合とまったく同様にして証明することができる．

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=\langle a^2,\ b^2\rangle+c^2\\&=\langle aa,\ bb\rangle+c^2 \geqq \langle ab,\ ba\rangle+c^2\\&=ab+\langle ba,\ cc\rangle \geqq ab+\langle bc,\ ca\rangle\\&=ab+bc+ca\end{aligned}$$

したがって，

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

が示された．系1から，等号は $a=b=c$ のとき成り立ちそのときに限ることがわかる．□

さらに，よく知られている次の不等式(3)〜(6)も，簡単に証明できる．なお，文字はすべて正の数とする．また，記述を簡単にするために

$$\langle a,\ b,\ c\rangle=a+b+c$$

と約束する．

(3)　$a^3+b^3 \geqq ab(a+b)$

(4)　$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqq abc(a+b+c)$

(5)　$\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c} \geqq 3$

(6)　$3(a^3+b^3+c^3) \geqq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

証明　どの不等式も与えられた文字に関して対称性を保つから，(3)では $a \geqq b$, (4)〜(6)では $a \geqq b \geqq c$ と仮定しても一般性は失われない．

(3)　$a \geqq b>0$ より $a^2 \geqq b^2>0$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=\langle a^2a,\ b^2b\rangle \geqq \langle a^2b,\ b^2a\rangle\\&=ab\langle a,\ b\rangle=ab(a+b)\end{aligned}$$

(4)　$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=\langle ac^2a,\ bc^2b\rangle+a^2b^2$

($ac^2 \geqq bc^2$ であるから，ここで基本操作を施せば)

$\geqq \langle ac^2b,\ bc^2a\rangle+a^2b^2$

$=\langle abab,\ bcac\rangle+ac^2b$

($aba \geqq bca$ であるから，やはり基本操作を施して)

$\geqq \langle abac,\ bcab\rangle+ac^2b$

$=abc(a+b+c)$

(5)　$\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$

$=\left\langle\left(\dfrac{1}{c}\right)a,\ \left(\dfrac{1}{a}\right)b\right\rangle+\dfrac{c}{b}$

$\left(\dfrac{1}{c} \geqq \dfrac{1}{a}\right.$ かつ $a \geqq b$ であるから基本操作を施すことができて$\Big)$

$\geqq \left\langle\left(\dfrac{1}{c}\right)b,\ \left(\dfrac{1}{a}\right)a\right\rangle+\dfrac{c}{b}$

$=1+\left\langle\left(\dfrac{1}{c}\right)b,\ \left(\dfrac{1}{b}\right)c\right\rangle$

ここでまた基本操作を施せば

$\geqq 1+\left\langle\left(\dfrac{1}{c}\right)c,\ \left(\dfrac{1}{b}\right)b\right\rangle$

$=1+1+1=3$

(6)　$3(a^3+b^3+c^3)$

$=\langle a^2a+b^2b+c^2c,\ b^2b+c^2c+a^2a,$

$a^2a+b^2b+c^2c\rangle$

($a \geqq b \geqq c$ より，左側の2つの項に基本操作を施すと)

$\geqq \langle a^2b+b^2c+c^2a,\ b^2a+c^2b+a^2c,$

$a^2a+b^2b+c^2c\rangle$

$=(a^2+b^2+c^2)a+(a^2+b^2+c^2)b$

$+(a^2+b^2+c^2)c$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

以上により所望の不等式が得られた．□

(3)の一般化に当たる次の不等式も，簡単に証明できる．

(7)　$a^n+b^n \geqq a^kb^k(a^{n-2k}+b^{n-2k})$，ここに n, k は自然数で $0<k<\dfrac{n}{2}$ とし，a, b は正の実数とする．

実際，$a^n+b^n=\langle a^n,\ b^n\rangle=\langle a^{n-k}a^k,\ b^{n-k}b^k\rangle$
ここで，$a\geqq b$ と仮定しても一般性は失われない．いま，そのように仮定すると，a，b は正の実数より，

$$a^{n-k}\geqq b^{n-k},\qquad a^k\geqq b^k$$

となるから，基本操作を施すことができる．

したがって，

$$\begin{aligned}\langle a^{n-k}a^k,\ b^{n-k}b^k\rangle&\geqq\langle a^{n-k}b^k,\ b^{n-k}a^k\rangle\\&=a^kb^k(a^{n-2k}+b^{n-2k})\end{aligned}$$

となり，(7)が得られる．

4. 不等式 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqq\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+k}$

a_i $(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ は実数とする．必要に応じて番号をつけなおすことにより，以下

$$a_i\geqq a_2\geqq\cdots\cdots\geqq a_n$$

と仮定する．

ここでは，最初に不等式

(8) $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqq\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}$

を示す．ただし，添数の番号は $\mathrm{mod}\,n$ で考える．

それでは，(8)の証明をしよう．

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{n}a_i^2&=\langle\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2\rangle\\&=\langle\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\ \sum_{i=1}^{n}a_{i+1}^2\rangle\\&=\langle\sum_{i=1}^{n}a_ia_i,\ \sum_{i=1}^{n}a_{i+1}a_{i+1}\rangle\\&\geqq\langle\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1},\ \sum_{i=1}^{n}a_{i+1}a_i\rangle\quad\text{（基本操作より）}\\&=2\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\end{aligned}$$

したがって，(8) が示された．

上記の証明とまったく同様にして，不等式

(9) $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqq\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+k}\quad(1\leqq k\leqq n-1)$

を示すことができるから，$n-1$ 個の不等式を得たことになる．

5. 相加平均・相乗平均

新しい方法で「相加平均≧相乗平均」も証明することができる．なお，本節では文字はすべて正の数とする．

不等式 (1) より

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

は示されるから，最初に

(10) $\dfrac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$

を示そう．

$a=X^3$，$b=Y^3$，$c=Z^3$ とおくと，不等式(10) は次の不等式と同値になる．

(11) $X^3+Y^3+Z^3\geqq3XYZ$

この不等式は X，Y，Z に関して対称であるから $X\geqq Y\geqq Z$ と仮定してよい．

$$\begin{aligned}X^3+Y^3+Z^3&=\langle XXX,\ YYY,\ ZZZ\rangle\\&\geqq\langle XXY,\ YYX,\ ZZZ\rangle\\&\geqq\langle XXY,\ YXY,\ ZZZ\rangle\quad\text{（基本操作より）}\\&\geqq\langle XXY,\ YXZ,\ ZZY\rangle\quad\text{（基本操作より）}\\&=\langle XYX,\ ZYZ,\ YXZ\rangle\\&\geqq\langle XYZ,\ ZYX,\ YXZ\rangle\quad\text{（基本操作より）}\\&=3XYZ\end{aligned}$$

したがって，不等式

$$X^3+Y^3+Z^3\geqq3XYZ$$

が示された．まったく同様にして

$$X^4+Y^4+Z^4+W^4\geqq4XYZW$$

も示すことができる．

実際，

$$\begin{aligned}&X^4+Y^4+Z^4+W^4\\&=\langle X^3X,\ Y^3Y\rangle+\langle Z^3Z,\ W^3W\rangle\\&\geqq\langle X^3Y,\ Y^3X\rangle+\langle Z^3W,\ W^3Z\rangle\\&=\langle XXYX,\ WWZW\rangle+\langle XYYY,\ WZWW\rangle\\&\geqq\langle XXYW,\ WWZX\rangle+\langle XYYZ,\ WZZY\rangle\\&=\langle XYWX,\ YZWZ\rangle+\langle XYZY,\ XWZW\rangle\\&\geqq\langle XYWZ,\ YZWX\rangle+\langle XYZW,\ XWZY\rangle\\&=4XYZW\end{aligned}$$

となるからである．

n が奇数，偶数かで場合分けして，上記のことを繰り返し施せば，不等式

(12) $\sum_{i=1}^{n}X_i^n\geqq n\prod_{i=1}^{n}X_i\quad(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$

を示すことができるから，「相加平均≧相乗平均」

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}\geqq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$$

が得られる．

おわりに

本稿では，与えられた文字に関して対称性を保つ不等式は，大小に注意して，文字を機械的に入れ替えることにより，証明が可能である事を述べた．

不等式の証明方法としては，新しい手法であると思う．また，問題ごとに，いちいち完全平方式を工夫しなくてもよいという意味で，大げさな言い方をすれば，「不等式の証明」の大衆化が図れるのではないかと考えている．この点で教育的意義があると考えられる．

本稿は足羽雄郎氏（東京都東大和市在住）との共同研究である．本稿を閉じるに当たり足羽氏に感謝の意を表したい．

〈参 考 文 献〉

[1] 足羽雄郎（私信，2002 年 3 月）．

[2] 高等学校 数学 A（改訂版）数研出版，p.43．

[3] 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編 文部省（平成 11 年 12 月）p.54．

[4] E. Beckenbach and R. Bellman, An Introduction to Inequalities, Random House and the L. W. Singer Company (1961).

（茨木県 常総学院高等学校）