ざっと計算する

松田（まつだ）　康雄（やすお）

指数関数，対数関数を教えるとき，筆者は，次のことを生徒に覚えさせている．

I．$\log_{10}2=0.3010$　　II．$\log_{10}3=0.4771$
III．$\dfrac{70}{(\text{複利の年利率}(\%))}$ ≒(元金が2倍になる年数)

自然現象や社会の現象は，指数や対数とつながりがあることが多く，実際に使うケースがままある．そのとき，ざっと計算できれば便利であって，計算のとっかかりとするために覚えてほしいのである．

I，IIの語呂合わせはそれぞれ『王さんは暇だ』(最近は監督業で忙しそう)，『ロクさんは死なない』．

まずＩを利用する問題を考えてみよう．

〔問題１〕　１枚の厚さが 0.1 mm の紙を半分半分と 30 回折った時，紙の厚さはどの位になるか．

〔問題２〕　６等星から１等星まで同じ割合で明るくなっていて，１等星は６等星の 100 倍の明るさである．では，１等星は２等星の何倍の明るさか．

〔問題３〕　あるネズミは毎月７倍ずつ増えるという．１年後には何倍になるか．

〔問題４〕　体積が $2\ \text{m}^3$ の立方体の一辺の長さを求めよ．

Ｉから

$$2 \fallingdotseq 10^{0.3}$$

として計算してみる．これは，

$$2^{10}=1024 \fallingdotseq 10^3$$

からも示される．

〔問題１の解答〕

$$0.1\times2^{30}\ (\text{mm}) \fallingdotseq 0.1\times10^{0.3\times30}\ (\text{mm})$$

$$=0.1\times10^{9}\ (\text{mm})=10^{8}\ (\text{mm})=10^{7}\ (\text{cm})$$

$$=10^{5}\ (\text{m})=10^{2}\ (\text{km})=100\ (\text{km})$$ ■

計算すれば確かにこんな厚さになるけれど，やはり不思議な気がする．

〔問題２の解答〕

１等星は２等星の $\sqrt[5]{100}$ 倍の明るさ．ここで

$$\sqrt[5]{100}=100^{\frac{1}{5}}=10^{0.4} \fallingdotseq 10^{1-0.3\times2}$$

$$=10\div2^2=2.5$$

より，約 2.5 倍の明るさ．

〔正確には 2.51188…… 倍の明るさ〕 ■

〔問題３の解答〕

１年後にネズミは 7^{12} 倍に増える．

$$7^2 \fallingdotseq 50=\frac{100}{2} \fallingdotseq 10^{2-0.3}=10^{1.7}$$

なので

$$7^{12} \fallingdotseq 10^{1.7\times6}=10^{10.2}$$

ここで

$10^4=1$ 万，$10^8=1$ 億，$10^{12}=1$ 兆，……

より，100 億倍以上．あるいは

$$10^{0.2}<10^{0.3} \fallingdotseq 2$$

より，100 億倍と 200 億倍の間．

〔正確には約 135 億倍〕 ■

〔問題４の解答〕

$$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}} \fallingdotseq 10^{0.3\times\frac{1}{3}}=10^{0.1}$$

$$=10^{1-0.3\times3}=\frac{10}{2^3}=\frac{10}{8}=1.25\ (\text{m})$$

〔正確には 1.2599……(m)〕 ■

以上，まずまずの答えが出るが，それは

$$2 \fallingdotseq 10^{0.3}$$

としても，誤差が少ないためだと思われる．

指数に関する極限

$$a>1\ \text{のとき}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$$

も，例えば，$a=2$，$n=30$ とすることによって感じがつかめる．

$$\frac{30}{2^{30}} \fallingdotseq \frac{30}{10^9} = \frac{3}{100000000} = 0.00000003$$

イメージとしては

$$\frac{\infty}{\Huge\infty} \to 0$$

である．

IIIは，文系の生徒には紹介にとどめるが，理系の生徒には，数学IIIの時間に説明をする．

説明の準備として，IとIIを利用して，次の問題を考えてみよう．

〔問題5〕 自然対数 $\log 2$ の近似値を求めよ．

〔問題5の解答〕

$$\log_{10} e \fallingdotseq \log_{10} 2.7 = \log_{10} \frac{3^3}{10} = 3\log_{10} 3 - 1$$

IIから

$$\log_{10} e = 3 \times 0.4771 - 1 = 0.4413$$

Iと合わせて

$$\log 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e} = \frac{0.3010}{0.4413} \fallingdotseq 0.7$$

〔正確には $\log 2 = 0.6931\cdots\cdots$〕 ■

〔IIIの証明〕

年利率 x %の複利で n 年預けると，元金が2倍になるとすると

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^n = 2$$

となる．両辺の自然対数を考えると

$$n\log\left(1+\frac{x}{100}\right) = \log 2 \qquad \cdots\cdots (1)$$

ここで，x が0に近い数のときに成り立つ1次の近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$$

に

$$f(x) = \log\left(1+\frac{x}{100}\right)$$

を当てはめると，(1)は

$$n \fallingdotseq \frac{100\log 2}{x} \qquad \cdots\cdots (2)$$

となる．ここで，問題5の近似値から

$$n \fallingdotseq \frac{70}{x}$$

が成り立つ． ■

この証明から分かるように，IIIは複利の年利率 x が小さいときしかうまく使えない．あくまで目安である．

IIIを利用して次の問題を考えてみよう．

〔問題6〕 日本の物価は大体15年で2倍になるそうである．1年平均どれくらい物価は上昇するだろうか．

〔問題7〕 ずっと昔，日本には「といち」と言って，十日で1割の複利でお金を貸すことがあったそうである．もしこの「といち」でお金を借りれば，1年後には借金は最初の何倍になるか．

〔問題6の解答〕 $70 \div 15 = 4.67$ (%) ■

デフレの今日では，少し事情が違うかも知れない．

〔問題7の解答〕 $70 \div 10 = 7$ より，70日目で借金は2倍になるので，1年で約 $2^5 = 32$ 倍になる．

〔実際には1年で30倍強〕 ■

正確な計算は機械に任せて，人間は大雑把な値をつかんだり，指数的変化の感覚を身につける必要があると思う．そのためにも，頭の中でざっと計算することが大切なのではないだろうか．

(明治学園高等学校)