偶関数・奇関数の性質について

宮田　毅一郎

1　はじめに

昨年夏に行われた第83回全国算数・数学教育学会(埼玉)大会講習会に参加した折に，講師で来られた国立教育政策研究所教育課程調査官の方が現場に居られたときの失敗談を聞き，私が今まで「偶関数・奇関数」について浅い理解で授業を行っていたことを反省し，高校生に対する指導内容を考え，以下教材研究を兼ねてまとめたものです．

2　偶関数・奇関数の定義と言葉の意味

言うまでもなく偶関数・奇関数は関数を学ぶ上で重要な概念の1つです．まず，定義を押さえておきます．数学IIの教科書にはこう書いてあります．

<u>定義</u>　一般に，関数 $f(x)$ において
$\boldsymbol{f(x)=-f(-x)}$ が成り立つとき，$f(x)$ は **奇関数**
$\boldsymbol{f(x)=\ \ f(-x)}$ が成り立つとき，$f(x)$ は **偶関数**
であるという．

定義に照らせば $f(x)=x^2$ や $f(x)=x^4$ は偶関数，$f(x)=x$ や $f(x)=x^3$ は奇関数となります．x^2 や x^4 のように x の偶数次で表される関数は偶関数，x や x^3 のように x の奇数次で表される関数は奇関数と言うのであろうということは分かります．しかし，そうして，性質の1つとして次のように書いてあります．

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

であるから，$\sin\theta$ は奇関数，$\cos\theta$ は偶関数である．奇関数のグラフは原点に関して対称であり，偶関数のグラフは y 軸に関して対称である．

$\sin\theta$，$\cos\theta$ と奇数，偶数との関係がいまいち分からないので様々な数学用語集等で調べても定義以外には

奇関数 (odd function),
偶関数 (even function)

と英単語の逐語訳になっていること以外はほとんど書かれていません．これだけでは前の定義と言葉の意味が乖離(かいり)したままです．ここで，次のことを考えれば，その距離は縮みそうです．

マクローリン (**Maclaurin**) 級数 により

$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots\cdots \\ \hfill (-\infty < x < \infty) \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots\cdots \\ \hfill (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

となるので x^2 や x^4 のように x の偶数次の級数で表される関数は偶関数，x や x^3 のように x の奇数次の級数で表される関数は奇関数である．

以上のような説明があれば用語の意味が分かったような気になるかと思います．数学II学習者に対してはもう少し説明に工夫が要りそうです．

3　偶関数・奇関数の微分・積分

偶関数・奇関数の言葉の意味が分かったつもりになったので，今度は少しこれらの関数の持つ性質を考えてみましょう．まず，こんなことが考えられます．

関数 $f(x)$ が微分可能であるとする．$f(x)$ が偶関数であるとき，微分の定義に従って計算すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to\infty}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to\infty}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h} \\ &= -f'(-x) \end{aligned}$$

これより偶関数の導関数は奇関数であることが分かります．同様に奇関数の導関数は偶関数であることも分かります．

※数学Ⅲ・合成関数の微分法学習者に対しては
$f(x)$ を奇関数とすると　　$f(x)=-f(-x)$
　両辺を微分すると
$$f'(x)=-f'(-x)\times(-1)=f'(-x)$$
　したがって，$f'(x)$ は偶関数としてもよい．

　つまり，下記のことが成り立ちます．

偶関数・奇関数の微分

偶関数 $\xrightarrow[\text{微分}]{}$ 奇関数 $\xrightarrow[\text{微分}]{}$ 偶関数 $\xrightarrow[\text{微分}]{}$ ……

奇関数 $\xrightarrow[\text{微分}]{}$ 偶関数 $\xrightarrow[\text{微分}]{}$ 奇関数 $\xrightarrow[\text{微分}]{}$ ……

これらのことを踏まえておけば
$$(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x\ \cdots\cdots$$
$$(x^3)'=3x^2,\quad (x^4)'=4x^3\ \cdots\cdots$$
であることより $\sin x$ が x^3，x^5 等の奇関数，$\cos x$ が x^2，x^4 などの偶関数と同様の性質を持つので，前のマクローリン級数までの知識を述べなくても多少なりとも分かったつもりにはなりそうです．

　また，逆に積分すると，

1)　偶関数は，奇関数＋定数
2)　奇関数は，偶関数

となることが分かります．

証明

偶関数 $f(t)$ の原始関数の１つを $F(t)$ とすると
$f(t)=f(-t)$ が成り立つので，
$$\int_0^x \{f(t)-f(-t)\}dx=0$$
$$\therefore\ \Big[F(t)+F(-t)\Big]_0^x=0$$
$$\therefore\ F(x)+F(-x)=2F(0)$$
$$\therefore\ F(x)-F(0)=-\{F(-x)-F(0)\}$$ 終

　偶関数・奇関数の微分・積分の結果の証明は参考書レベルの問題なので，理解は難しくないと思います．

4　偶関数・奇関数の定積分公式

　数学Ⅱでは下記のような公式を学びます．

偶関数・奇関数の定積分公式①

(1)　$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n}dx=2\int_0^a x^{2n}dx$

(2)　$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n-1}dx=0$　　（n は自然数）

　これを用いると，整関数は偶関数と奇関数の和として表されるので，
$$\int_{-a}^a (px^4+qx^3+rx^2+sx+t)dx$$
$$=\int_{-a}^a (px^4+rx^2+t)dx+\int_{-a}^a (qx^3+sx)dx$$
$$=2\int_0^a (px^4+rx^2+t)dx$$
のように簡潔に計算することができます．

　例えば，
$$\int_{-3}^3 (4x^3+6x^2-9x-10)dx$$
$$=2\int_0^3 (6x^2-10)dx=2\Big[2x^3-10x\Big]_0^3$$
$$=2(2\cdot 3^3-10\cdot 3-0)=48$$
といった計算も行えます．さらに数学Ⅲでは下記のような公式を学びます．

偶関数・奇関数の定積分公式②

$f(x)$ が偶関数 $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数 $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=0$

　これを用いれば，$f(x)=x\sqrt{a^2-x^2}$ とおくとき，$f(-x)=-f(x)$ であるから，
$$\int_{-a}^a x\sqrt{a^2-x^2}dx=0$$
といった計算もできます．

　少し難しいですが，次のような問題もあります．

問題

(1)　関数 $f(x)$ は常に $f(x)=f(-x)$ を満たす．このとき，$\displaystyle\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_0^a f(x)dx$ となることを示せ．

(2)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx$ を計算せよ．

解答

(1)　$\displaystyle\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$
$$=\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx+\int_0^a \frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx\quad\cdots\cdots①$$
$-x=t$ とおくと　　$-dx=dt$
よって
$$\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_a^0 \frac{f(-t)}{1+e^t}(-dt)$$
$$=\int_0^a \frac{f(-x)}{1+e^x}dx\quad\cdots\cdots②$$

①，②から

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_0^a\left\{\frac{f(x)}{1+e^{-x}}+\frac{f(-x)}{1+e^{x}}\right\}dx$$
$$=\int_0^a\left\{\frac{e^xf(x)}{e^x+1}+\frac{f(x)}{1+e^x}\right\}dx$$
$$=\int_0^a\frac{(e^x+1)f(x)}{e^x+1}dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx \quad \text{終}$$

(2) $f(x)=x\sin x$ とすると　$f(x)=f(-x)$

よって，(1)から

$$(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(-\cos x)'dx$$
$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1 \quad \text{答}$$

(1)の等式なしで，(2)の $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx$ を計算するのは普通の高校生にとっては難しいと思えます．

5　関数の偶関数，奇関数での和分解

任意の関数 $f(x)$ は下記のように表すことができる．

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$f_E(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,　$f_O(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ とおくと

$$f_E(x)=f_E(-x),\ f_O(x)=-f_O(-x)$$

なる関係が得られるから関数 $f_E(x)$ は偶関数であり，$f_O(x)$ は奇関数である．

例えば，$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ や $y=e^x$ といった関数も

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$$

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x^1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6+\cdots\cdots$$

となるので，整関数だけでなく **もともと対称性を持たなかったどんな関数も，必ず偶関数と奇関数の和で表される** ことが分かります．

このことから任意のフーリエ級数（後述）に展開するにあたっても偶関数である cos と奇関数である sin による展開が必要であることに注意しなくてはいけません．また，$y=e^{ix}$ の場合には

$$e^{ix}=\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\cdots\right)+i\left(\frac{1}{1!}x^1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\cdots\right)$$

となるので実部が偶関数で，虚部が奇関数になります．

ここで，$u(x)=e^{ax}$ とおくとき，

$$u_E(x)=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2},\quad u_O(x)=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

となる．これはそれぞれ **双曲線関数**

$$\cosh ax=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2},\ \sinh ax=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

となります．

ついでですが，$y=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ $(a>0)$ を **カテナリー**（**懸垂線**）といい，鉄の鎖を吊り下げたときにできる曲線であり，y 軸に関して対称（偶関数）であるのも既知の通りです．

なお，一般の定積分も

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{-h}^{h}f(x+c)dx$$
$$\left(c=\frac{a+b}{2},\ h=\frac{b-a}{2}\right)$$

として，上の公式を適用できる形に導けます．

6　フーリエ解析に関して

偶関数・奇関数の性質を多用しているものの中の１つとしてフーリエ（Fourier）解析が挙げられます．それについて少し触れておきたいと思います．

微分可能なあらゆる関数はテイラー（Taylor）展開できます．これと似たものにフーリエ（Fourier）解析があります．これは，sin と cos で周期の関数を表そうとするものです．例えば

$F_{[-\pi,\pi]}=\{f|f(t)$ は $[-\pi,\ \pi]$ で区分的に連続な関数$\}$ とおくと，$F_{[-\pi,\pi]}$ は線形空間となり，$F_{[-\pi,\pi]}$ の２つの関数 f，g について

$$(f,\ g)=\int_a^b f(t)g(t)dt$$

で f と g の内積を定義すると $F_{[-\pi,\pi]}$ において，関数列

$$\{1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \cdots\cdots,\ \cos nt,\ \sin nt,\ \cdots\cdots\}$$

に関して偶関数・奇関数の性質を使って内積を計算

すると，

$$(\cos nt,\ \sin mt)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt \sin mt\, dt=0$$

となることなどにより直交系をなしていることが分かります．

すると参考書等によく出題される次の5つの式

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx=0$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, dx=0$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin mx\, dx=\begin{cases}0 & (n\neq m)\\ \pi & (n=m)\end{cases}$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx\, dx=\begin{cases}0 & (n\neq m)\\ \pi & (n=m)\end{cases}$

(5) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin mx\, dx=0$

は計算できることが望ましいことも分かります．

簡単にフーリエ級数の定義をしておきます．

<u>定義</u>　$f(x)$ を区分的に連続な周期 2π の周期関数とする．このとき

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\, dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\, dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を $f(t)$ の **フーリエ係数** と言い，形式的級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

を $f(t)$ の **フーリエ級数** または **フーリエ級数展開** と言い，

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

と書く．

フーリエ級数が $f(t)$ に収束するかどうかについてはフーリエの定理を用いて調べます．

また，偶関数・奇関数の性質を使って計算すると，$f(t)$ が偶関数のとき，$b_n=0$，$f(t)$ が奇関数のとき，$a_n=0$ となることより，偶関数は cos だけの級数，奇関数は sin だけの級数で表されることが分かります．(**フーリエ余弦展開・正弦展開**)

ちなみに，今日使われている定積分の記号 $\int_a^b f(x)dx$ はフーリエが考え出したものです．

7　おわりに

今まで何気なく偶関数や奇関数の性質を用いて積分計算をしてきた(生徒にさせてきた)が，改めて見直せば，理工系進学者にとっては重要な知識であることを再認識することができました．今すぐ使える話題ばかりではないかもしれませんが，教科書や参考書に出ていない話題にでも興味・関心がある生徒に話す機会があれば，積極的にしていければと考えています．

〈引用・参考文献〉

(1)　矢野健太郎 監修，春日正文 編．モノグラフ24 公式集4訂版．科学新興社．1988．

(2)　荒木不二洋 編．チャート式 解法と演習 数学Ⅲ+C．数研出版．2000．

(3)　石村園子 著．すぐわかるフーリエ解析　東京図書．1996．

(金沢市立工業高等学校)

(2002年6月記)