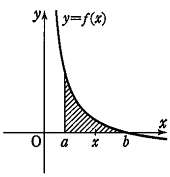
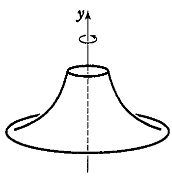
y 軸の周りに回転させてできる体積の求め方の公式の紹介

君島　巖（きみしま　いわお）

半年程前のことである，スキー１級を目指しているスーパーレディーの T.Y. 先生からこんな質問があった．それは岩手大学かどこかの入試問題とその解答であったが，解答のアプローチがはっきりとは分からないという．私はそれをじーっと見ているうちに，これは何かの公式を含んでいるに違いないと感じた．それは「曲線を y 軸の周りに１回転させてできる立体の体積を求める」問題であった．その夜，これについて考察し，翌日 T.Y. 先生にその結果を話したところ，彼女は，数年前３ヶ月程アメリカに派遣された折，買い求めて来たという微積の教科書を見せてくれた．すると驚いたことにこれに関する公式が出ていた．私には全く未知のものであり，ここに紹介したい．



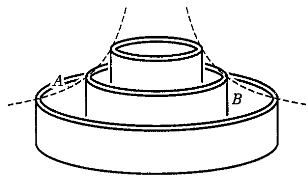


上の図のような曲線 $y=f(x)$ を区間 $a\leqq x\leqq b$ で y 軸の周りに１回転させてできる立体の体積を V とすると

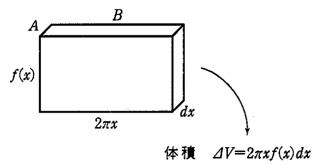
$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

で与えられる．

イメージ的には次の図のように，シリンダーが集まってできたと考えるのである．



１つのシリンダーをひろげると下図のようになる．



これらを a から b まで積分すれば体積が得られる．

どういう場合にこの公式が有効かというと，元の曲線 $y=f(x)$ が簡単に x について解き得ない問題のときである．

実例を示そう．

（例１）　曲線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

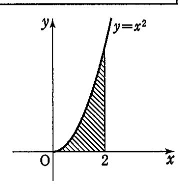
（解１）

$$V=2\pi\int_0^2 x\cdot x^2\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{4}\Big[x^4\Big]_0^2$$

$$=\frac{2\pi}{4}\times 16$$

$$=8\pi$$ 答



(解2)　$y=x^2$ より　　$x=\sqrt{y}$

$$V'=\pi\int_0^4 x^2 dy$$

$$=\pi\int_0^4 y\,dy=8\pi$$

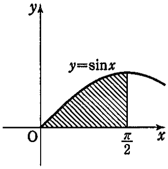
$$\therefore\quad V=\pi\times2^2\times4-V'$$

$$=16\pi-8\pi=8\pi \quad \text{答}$$

☆　明らかに(解1)の方がはるかに簡単である．

(例2)　曲線 $y=\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

(解)　$V=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$



$f(x)=x,\quad g'(x)=\sin x$

$f'(x)=1,\quad g(x)=-\cos x$

$$V=2\pi\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$$

$$=-2\pi\Big[x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\pi\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

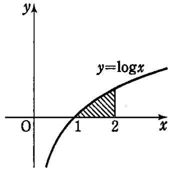
$$=-2\pi\times0+2\pi\times1$$

$$=2\pi \quad \text{答}$$

☆　この(例2)のように，曲線 $y=\sin x$ を x について解くことは高校では習わないが，このような時にもこの公式は有効なのである．

(例3)　曲線 $y=\log x$ $(1\leqq x\leqq2)$ を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

(解)　$V=2\pi\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$



$f'(x)=x,$

$g(x)=\log x,$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2,$

$g'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$V=2\pi\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^2-2\pi\int_1^2\frac{1}{2}x\,dx$$

$$=2\pi\times\frac{1}{2}\times4\log2-\frac{\pi}{2}\Big[x^2\Big]_1^2$$

$$=4\pi\log2-\frac{3}{2}\pi \quad \text{答}$$

☆　数Ⅲで部分積分を習うが $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$ の形が上のような回転体を計算する途中の式であるのは興味深い．

(元栃木県立黒磯南高等学校教諭)