第13回日本数学コンクール

大沢（おおさわ） 健夫（たけお）

高大連携における数学教育

言うは易く行うは難きことが最近多過ぎる気がしてならない．教育関係では総合学習が顕著な例であろうが，大学で教育と研究に携わる身にとっては高大連携がよりさし迫った課題である．文科省主導で立ち上げられたSSH（スーパーサイエンスハイスクール）やSPP（サイエンスパートナーシッププログラム）によって，理数系に向いた高校生たちが早くから大学の教官に接して教えを受ける道が開かれた．このこと自体はたいへん結構なことであるが，折角の骨折りも実があがらなければつまらない．そこで高大連携における早期科学教育のあり方については，高校側も大学側もこれから経験を積みながら考えを練っていかねばなるまい．日本数学コンクールはすでに第13回となり，SSHやSPPのさきがけとも言えるので，コンクールの歴史はこれらの事業にとっても参考になるはずである．今回はこのような事情を念頭に置きつつ，問題の背景だけでなくわれわれが迷いながらも新しい道を模索している様子がお伝えできればと思う．

模範解答を用意せずに出題するいつも通りのやり方で，今回は「動くヒモ」（ジュニアと共通），「循環小数の積」，「最適直線」の3問を提出した．動くヒモの元になったのは，問題委員会で出された立体の切り口のテーマであり，容器に水を入れて観察させてはなどの話を経てこの形になった．そもそも点が動いて辺となり，辺が動いて面となるという考え方はユークリッドの原論とは逆であり，それゆえ一見日常経験に即しているようでそうでない．この考え方に適応できるかどうかが1つの関門になったのかもしれなかった．出題側としては，メビウスの帯やクラインの壺ぐらいのものは多くの生徒が目にしているという思い込みもあり，そこからもう1つ踏み込んだ所を到達点として想定したのだが，結果を見る限りこれは甘すぎたと言わざるを得ない．ちなみに点が動いて云々はA.M.ルジャンドル著の「幾何学」の冒頭にあり，この本こそかの天才数学者E.ガロワがまっ先に学び，100年もの間フランスで幾何学の優れた入門書としての地位を保った教科書である．現代物理学の最先端にヒモ理論というものがあり，粒子の生成消滅のモデルとして閉じたヒモが動いてできる曲面が採用されている．このことに言及して想像をたくましくする高校生がいてほしかったと思うのは欲が深すぎるだろうか．循環小数の積の方は，（つねに一定の割合で存在する）パズル好きの生徒たちに歓迎されたようだが，この問題は取り組んでみるとすぐ分かるように奥が深い．完全な解答は1つもなかった．この問題を洗練し，一般化していくと，最先端の数論の課題にすぐ行き着きそうである．最適直線は，普通の生徒が結果を残せる問題も入れようという意図で作られたものであり，コンクールとしては例外的に模範解答に近いものを用意しての出題だったが，嬉しい誤算があり飛び抜けて優れた解答が現れた．従ってこの問題も真の意味で数学コンクールの問題と言ってよい．

論文賞は今回はテーマを3つ出した．いずれについても内容のある応募作品があったが，特にフーコーの振り子を題材に取ったものに対しては本腰を入れて物理現象の考察を試みたものがあり，伊藤正之会長（名古屋大学副総長）ともどもたいへん感心した．しかしながら今回は受賞者の数が多過ぎたようなので，次回はテーマの数は2つに限ることにした．

このように数学コンクールというものは，やれば毎年それなりに手応えのあるものなのであるが，その手応えを持続させてもっと大きな実績につなげたいと思うと煩悩のとりことならぬとも限らないので，そうならぬよう，この先はコンクールの趣旨をSSHやSPPとの協力関係の中で生かしていくということを考えれば良いのではと思っている．数学コンクールのフォローアップセミナーは，当初は合

宿を含む大がかりなものだったが，最近は主催者の一部が有志ボランティアの形で細々と続けている．とはいえ，公開講演会の形で行う「数理ウェーブ」には毎回約 30 名の参加があり，「ガキゼミ」の名で 6 回行った勉強会には毎回約 10 名の参加があった．このような活動は参加者たちにも喜んでもらっているので，将来も継続していきたいと思うのだが，今の形のままでは早晩行き詰まる．そう思っていた所へ SPP や SSH を実施中の高校から協力の要請を頂いた．これらは数学コンクールと方向性の似た事業であるが，実際にやってみると勝手の違う所がいろいろ出てきて面白い．数学コンクールを続けていくためにも，これらは重要な存在であろう．ともあれ受験体制というものを見て見ぬふりをしながら数学教育の可能性を探ってみると，今まで見えていなかったものが次々と見えてきたような気がする．よって，もっと多くの同好の士を得たいと願うものである．

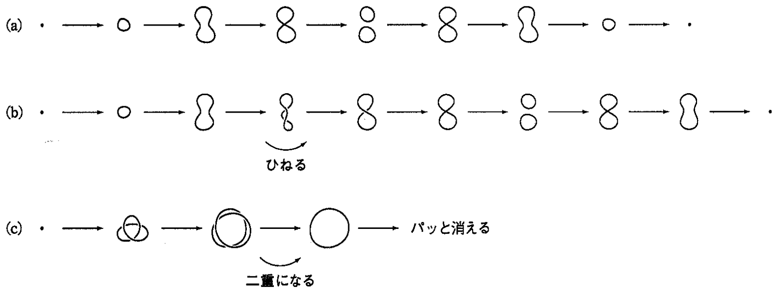
（名古屋大学　多元数理科学研究科）

問題 1　（動くヒモ）

むかしの幾何学の教科書には「点が動いて曲線になり，曲線が動いて曲面になる」と書かれています．曲面というものをこのようにとらえることによって，平面の点だけでなく，いろんな曲面上の点を数値化することができます．地球儀の緯線や経線がそのよい例ですね．

さらに，曲線が（ある程度なめらかに）動いてできたものはすべて曲面なのだと思うことにより，目には直接見えないものまでが曲面だと思えてきます．たとえば，あなたの目の前に突然ポツンと点が現れ，それが輪になったかと思うとみるみるうちに大きくなり，やがて再び縮んで点になり，消え失せていったとします．こういうものを細かく輪切りにされた球面だと思っても，そんなに変ではないでしょう（実際あなたが見たものは時空の 4 次元空間に入った球面の 1 つの姿ともいえるのです）．

そこで問題ですが，空間内で次の順序で変形していくヒモ(a)，(b)，(c)が形づくる曲面について，その曲面たちの独自の性質や，球面との主な違いについて詳しく説明して下さい．



さらに（3 次元でも 4 次元でも構いませんが）曲線を自由に動かしておもしろい曲面を作ってみせて下さい．そのために（会場内の）曲面上に曲線を書いて，曲線が動いて曲面ができる様子を観察してみて下さい．

問題 2 （循環小数の積）

無限に続く小数（無限小数）のうち，あるケタから先が一定の数字の列の繰り返しになるものを循環小数といいます（ただし，0.0999…… のようにあるケタから先がすべて 9 であるものは除きます）．繰り返し現れる数字の列を循環節といい，循環節にふくまれる数字の個数を循環節の長さといいます．

たとえば，$\frac{1}{3}=0.333\cdots\cdots$，$\frac{1}{12}=0.0833\cdots\cdots$ の場合，循環節は 3 でその長さは 1，

$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots\cdots$ の場合，循環節は 142857（または 428571，または 285714，または……）で，循環節の長さは 6 です．

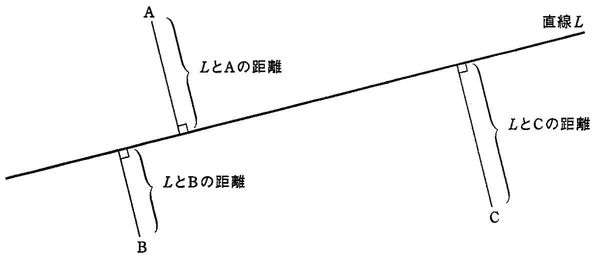
(1) 循環節の長さが 1 の小数どうしの積も循環小数でしょうか．もしそうなら，積の循環節の長さの最大と最小はそれぞれいくつでしょう．

(2) m と n が互いに素な自然数のとき，循環節の長さが m の小数と n の小数をかけると，積は循環小数でしょうか．もしそうなら，積の循環節の長さの最大と最小はそれぞれいくつでしょうか．

(3) より一般に，m と n が互いに素とは限らない場合はどうでしょう．

問題 3 （最適直線）

1. A，B，C の 3 地点までの距離の和を最小にする直線（最適直線）の道路を作ろうと思います．以下に従ってそれを見つけて下さい．



(i) まず，最適直線は A，B，C の少なくとも 1 地点を必ず通らなければなりません．その理由を説明して下さい．

(ii) 次に，A，B，C の 2 地点を通る直線の中に最適直線があります．その理由を説明して下さい．

2. 上の問いを参考にして，A，B，C，D 4 地点までの距離の和を最小にする直線の道路を考察して下さい．特に A，B，C，D が凸四角形の頂点となっている場合の最適直線を求めるにはどう考えればよいでしょう．

第 3 回日本数学コンクール論文賞

【問題 1. 正四面体】

ビーズ・アクセサリーの自作が流行していますが，私たちも正四面体を材料にビーズ制作をやってみましょう．ここでは，面と面をあわせて糊付けしてつないでいくことにします．

正四面体を糊付けしてつなぎあわせて作られるもののうち

(1) 凸多面体で最大のものは何でしょう．

(2) ネックレスのように輪の形をしたものや， 8 の字型のものはあるでしょうか．

【問題 2. ドーナツ上の振り子】

1851 年，フランスの科学者フーコーは巨大な振り子の振動方向が次第に変化していくことにより，地球の自転を実験的に証明しました．さて，自転するドーナツ型の星の上で同じ実験をしたとき，この星の自転を証明することができるでしょうか．ただし，振り子には星の表面に対して垂直な重力以外の力は働かないとします．

【問題 3. 不可能物体】

4 枚の板をつなげて下記の左図のように見える囲いを作ることはできますが，右図のようにつなぐことはできません．その理由をなるべく数学的に説明して下さい．