数学的帰納法の指導について
——えんおう遊びを通して——

横山(よこやま)　政道(まさみち)

0. はじめに

「鴛鴦(えんおう)遊び」とは，上段のように黒と白が交互に並んだ配列から，右隅の2つの空きを用いて，隣り合った2つの基石をいっしょに移動させて，下段のような黒と白に分割された配列に直すゲームで，何回(最小回数)で完了できるかを競う．

●○●○●○●○

⇩

○○○○●●●●

帰納法は生徒にとってわかりにくい部分であり，ドミノ倒し等いろいろ例をあげ説明するにも関わらず，ピンとこない生徒は多い．そこで，200年以上も昔から先人たちが遊び親しんできたこのゲームを活用して帰納法の授業を実践した．

1. えんおう遊びについて

「一般に，nペア(ただし $n \geqq 4$)の入れかえの最小回数はn回である」は成り立つか？

(i) $n=4k$ (kは自然数)の場合($n=4, 8, 12, \cdots\cdots$)

(ア)　4ペアの場合

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最初	●	○	●	○	●	○	●	○		
1回目	●			○	●	○	●	○	○	●
2回目	●	●	○	○			●	○	○	●
3回目	●	●	○	○	○	○	●			●
4回目			○	○	○	○	●	●	●	●

(イ)　8ペアの場合

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
最初	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○		
1回目	●			○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	○	●
2回目	●	●	○	○	●	○	●	○	●	○	●	○			●	○	○	●

⇩　4ペアで4回　⇩

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
6回目	●	●	○	○			○	○	○	○	●	●	●	●	●	○	○	●
7回目	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●			●
8回目			○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●

(ウ) 12ペアの場合

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
最初	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○		
1回目	●			○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	○	●
2回目	●	●	○	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○			●	○	○	●

⇩　8ペアで8回　⇩

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
10回目	●	●	○	○			○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	●
11回目	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●			●
12回目			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

$n=16, 20, \cdots\cdots$，一般に $n=4k$ のとき最小回数はn回である．

(ii) $n=4k+1$ の場合($n=5, 9, 13, \cdots\cdots$)

(ア) 5ペアの場合

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
最初	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○		
1回目	●			○	●	○	●	○	●	○	○	●
2回目	●	●	○	○	●	○			●	○	○	●
3回目	●	●	○			○	○	●	●	○	○	●
4回目	●	●	○	○	○	○	○	●	●			●
5回目			○	○	○	○	○	●	●	●	●	●

4ペアの場合と同様に，$n=4k+1$ で成り立つ．

(iii) $n=4k+2$ の場合($n=6, 10, 14, \cdots\cdots$)

(ア) 6ペアの場合

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
最初	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○		
1回目	●			○	●	○	●	○	●	○	●	○	○	●
2回目	●	●	○	○			●	○	●	○	●	○	○	●
3回目	●	●	○	○	○	●	●	○	●			○	○	●
4回目	●	●	○	○	○			○	●	●	●	○	○	●
5回目	●	●	○	○	○	○	○	○	●	●	●			●
6回目			○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●

4ペアの場合と同様に，$n=4k+2$ で成り立つ．

(iv) $n=4k+3$ の場合($n=7, 11, 15, \cdots\cdots$)

(ア) 7ペアの場合

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
最初	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○		
1回目	●			○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	○	●
2回目	●	●	○	○	●	○	●	○			●	○	●	○	○	●
3回目	●	●	○	○	●			○	○	●	●	○	●	○	○	●
4回目	●	●	○	○	●	●	○	○	○	●			●	○	○	●
5回目	●	●	○	○			○	○	○	●	●	●	●	○	○	●
6回目	●	●	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●			●
7回目			○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●

4ペアの場合と同様に，$n=4k+3$ で成り立つ．

まとめ

> n が4以上の自然数のとき
> n ペアの碁石の入れ替えの最小回数 N は，n 回であることを考察せよ．

(i) $n=4k$ ($k=1, 2, 3, \cdots\cdots$) のとき

$n=4$ のとき $N=4$ は成立 ⇨ $n=8$ のとき $N=2+4+2=8$ は成立

⇨ $n=12$ のとき $N=2+8+2=12$ は成立 ……

よって，$n=4k$ (n は4の倍数)のとき，n ペアの入れ替えの最小回数 N は n 回である．

(ii) $n=4k+1$ ($k=1, 2, 3, \cdots\cdots$) のとき

$n=5$ のとき $N=5$ は成立 ⇨ $n=9$ のとき $N=2+5+2=9$ は成立

⇨ $n=13$ のとき $N=2+9+2=13$ は成立 ……

よって，$n=4k+1$ ($k=1, 2, 3, \cdots\cdots$)のとき，n ペアの入れ替えの最小回数 N は n 回である．

(iii) $n=4k+2$ ($k=1, 2, 3, \cdots\cdots$) のとき

$n=6$ のとき $N=6$ は成立 ⇨ $n=10$ のとき $N=2+6+2=10$ は成立

⇨ $n=14$ のとき $N=2+10+2=14$ は成立 ……

よって，$n=4k+2$ ($k=1, 2, 3, \cdots\cdots$)のとき，n ペアの入れ替えの最小回数 N は n 回である．

(iv) $n=4k+3$ ($k=1, 2, 3, \cdots\cdots$) のとき

$n=7$ のとき $N=7$ は成立 ⇨ $n=11$ のとき $N=2+7+2=11$ は成立

⇨ $n=15$ のとき $N=2+11+2=15$ は成立 ……

よって，$n=4k+3$ ($k=1, 2, 3, \cdots\cdots$)のとき，n ペアの入れ替えの最小回数 N は n 回である．

(i)〜(iv)より，

n は4以上の自然数のとき，n ペアの碁石の入れ替えの最小回数 N は，n 回である．

数学的帰納法について

ある命題について，

(I) $n=k$ ($k \geqq 1$) のとき成り立つならば，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(II) $n=1$ のとき成り立つ．

この2つの事柄が成り立つことを示すと，すべての自然数でその命題が成り立つことが示される．このような証明法を数学的帰納法という．

2. 最後に

生徒の反応・感想(アンケート結果から)

パズルを通して帰納法の意味が理解できたかの質問に対し，理解できた(6％)，だいたい理解できた(72％)，あまり理解できなかった(13％)．

また，感想の一部を紹介すると，ゲームみたいだったので楽しかった．/難しかったけど，出来たときはすごく嬉しかった．/帰納法の学習をパズルにしてやってみたら面白くて，頭の中に入ったので良かった．/200年以上も昔のゲームができてとても興味が湧いた．

《参 考 文 献》

「数理パズルのはなし」大村平著，日科技連出版社

(宮崎県立高千穂高等学校)