

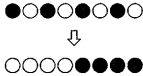
数学的帰納法の指導について

——えんおう遊びを通して——

よこやま まきみち
横山 政道

0. はじめに

「鴛鴦(えんおう)遊び」とは、上段のように黒と白が交互に並んだ配列から、右隅の2つの空きを用いて、隣り合った2つの基石をいっしょに移動させて、下段のような黒と白に分割された配列に直すゲームで、何回(最小回数)で完了できるかを競う。



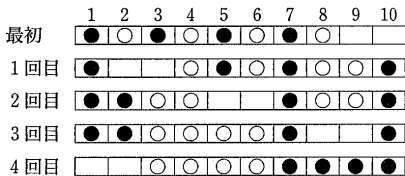
帰納法は生徒にとってわかりにくい部分であり、ドミノ倒し等いろいろ例をあげ説明するにも関わらず、ピンとこない生徒は多い。そこで、200年以上も昔から先人たちが遊び親しんできたこのゲームを活用して帰納法の授業を実践した。

1. えんおう遊びについて

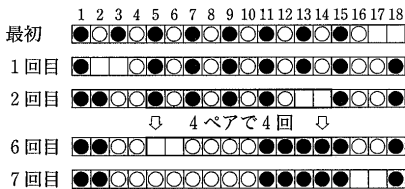
「一般に、 n ペア(ただし $n \geq 4$)の入れかえの最小回数は n 回である」は成り立つか？

(i) $n=4k$ (k は自然数) の場合 ($n=4, 8, 12, \dots$)

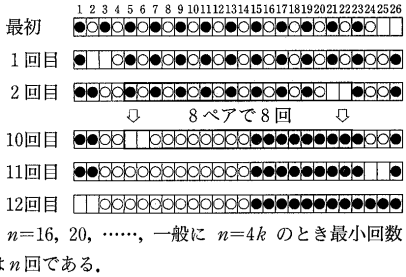
(ア) 4ペアの場合



(イ) 8ペアの場合

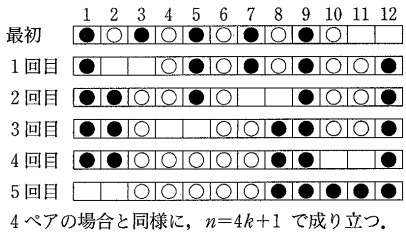


(ウ) 12ペアの場合



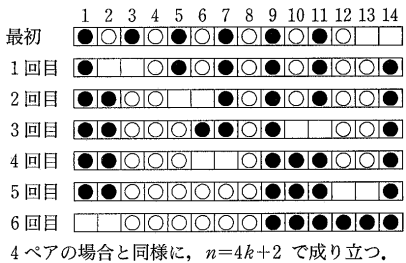
(ii) $n=4k+1$ の場合 ($n=5, 9, 13, \dots$)

(ア) 5ペアの場合



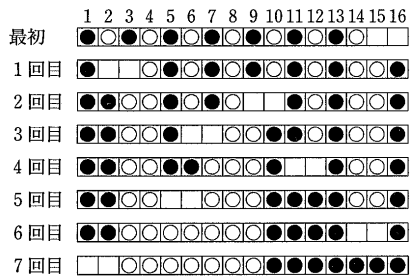
(iii) $n=4k+2$ の場合 ($n=6, 10, 14, \dots$)

(ア) 6ペアの場合



(iv) $n=4k+3$ の場合 ($n=7, 11, 15, \dots$)

(ア) 7ペアの場合

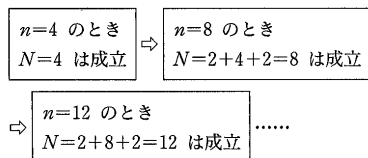


4ペアの場合と同様に, $n=4k+3$ で成り立つ.

まとめ

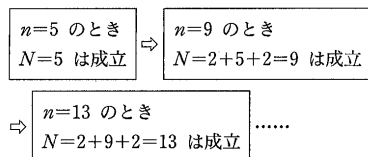
n が 4 以上の自然数のとき
 n ペアの基石の入れ替えの最小回数 N は, n 回であることを考察せよ.

(i) $n=4k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき



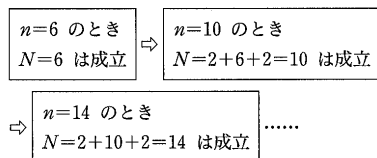
よって, $n=4k$ (n は 4 の倍数) のとき, n ペアの入れ替えの最小回数 N は n 回である.

(ii) $n=4k+1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき



よって, $n=4k+1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき, n ペアの入れ替えの最小回数 N は n 回である.

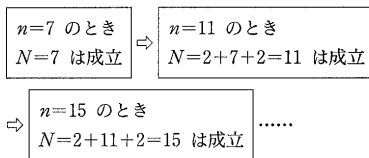
(iii) $n=4k+2$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき



よって, $n=4k+2$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき, n

ペアの入れ替えの最小回数 N は n 回である.

(iv) $n=4k+3$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき



よって, $n=4k+3$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき, n ペアの入れ替えの最小回数 N は n 回である.

(i)~(iv)より,

n は 4 以上の自然数のとき, n ペアの基石の入れ替えの最小回数 N は, n 回である.

数学的帰納法について

ある命題について,

(I) $n=k$ ($k \geq 1$) のとき成り立つならば, $n=k+1$ のときも成り立つ.

(II) $n=1$ のとき成り立つ.

この 2 つの事柄が成り立つことを示すと, すべての自然数でその命題が成り立つことが示される. このような証明法を数学的帰納法という.

2. 最後に

生徒の反応・感想 (アンケート結果から)

パズルを通して帰納法の意味が理解できたかの質問に対し, 理解できた (6%), だいたい理解できた (72%), あまり理解できなかった (13%).

また, 感想の一部を紹介すると, ゲームみたかったので楽しかった。/ 難しかったけど, 出来たときはすごく嬉しかった。/ 帰納法の学習をパズルにしてみたら面白くて, 頭の中に入ったので良かった。/ 200 年以上も昔のゲームができてとても興味が湧いた。

《参考文献》

「数理パズルのはなし」大村平著, 日科技連出版社

(宮崎県立高千穂高等学校)