閉曲線が囲む図形の面積

石濱（いしはま）　文武（ふみたけ）

§1. はじめに

数学IIIで扱う図形の面積の問題の中には，閉曲線が囲む図形あるいはその一部分と直線が囲む図形の面積を求める問題とみなされるものがあります．その場合，曲線の方程式は，陰関数形またはそれから得られる陽関数，極方程式，媒介変数表示等で与えられます．

本稿では，閉曲線が媒介変数表示された場合について，閉曲線が囲む図形の面積を求める一般的な公式を確認し，いくつかの実例を挙げます．

準備として，単一閉曲線とそれに関連するいくつかの用語を定義します．また，最後に線積分との関連についても触れます．

§2. 単一閉曲線

xy 座標平面上で，点集合

$C=\{\mathrm{P}(x,\ y)\,|\,x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha \leqq t \leqq \beta\}$

$(x(t),\ y(t)$ は $\alpha \leqq t \leqq \beta$ で連続$)$ (2.1)

は一般に連続曲線を表します．

便宜上，本稿では，点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ を $\mathrm{P}(t)$ と表し，2 点 $\mathrm{P}(t_1)$ と $\mathrm{P}(t_2)$ が一致することを $\mathrm{P}(t_1)=\mathrm{P}(t_2)$ と表します．また，**媒介変数 t は** 常に，(2.1) の場合 α から β まで **単調に増加させる** ものとします．このとき，点 $\mathrm{P}(t)$ は始点 $\mathrm{P}(\alpha)$ から終点 $\mathrm{P}(\beta)$ まで連続的に動きます．このように，**曲線は向きを含めて考えます．** C と逆向きの曲線を $-C$ で表します．

$-C=\{\mathrm{P}(x,\ y)\,|\,x=x(-t),\ y=y(-t),\ -\beta \leqq t \leqq -\alpha\}$ (2.2)

C と $-C$ は図形としては合同ですが，向きが逆なので，別の曲線と考えます．

曲線 $C_1=\{\mathrm{P}(t)\,|\,\alpha \leqq t \leqq \beta\}$ の終点 $\mathrm{P}(\beta)$ と

曲線 $C_2=\{\mathrm{Q}(t)\,|\,\beta \leqq t \leqq \gamma\}$ の始点 $\mathrm{Q}(\beta)$ が一致するとき，C_1 と C_2 を結合してできる曲線を C_1+C_2 と表します．

$C_1+C_2=\{\mathrm{R}(t)\,|\,\alpha \leqq t \leqq \beta$ のとき $\mathrm{R}(t)=\mathrm{P}(t)$，

$\beta \leqq t \leqq \gamma$ のとき $\mathrm{R}(t)=\mathrm{Q}(t)\}$

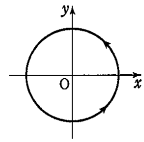
このとき，C_1+C_2 は $\alpha \leqq t \leqq \gamma$ で連続です．

[曲線の例]

$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

左回りの円

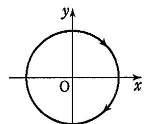


(2.3)

$\begin{cases} x=\cos t \\ y=-\sin t \end{cases}$

$(-2\pi \leqq t \leqq 0)$

右回りの円

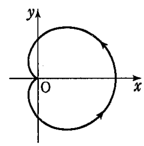


(2.4)

$\begin{cases} x=\cos t(1+\cos t) \\ y=\sin t(1+\cos t) \end{cases}$

$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

カージオイド

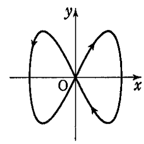


(2.5)

$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\sin 2t \end{cases}$

$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

リサージュ



(2.6)

なお，正方形の内部の各点をすべてもれなく通過する曲線 (Peano 1890) というようなものもあります．

([例] 終わり)

始点と終点が一致する曲線を **閉曲線** と呼びます．また，条件 $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow \mathrm{P}(t_1) \neq \mathrm{P}(t_2)$ (ただし，閉曲線の場合は始点と終点は除く．以下同じ.) を満たす曲線を **単一曲線** と呼びます．

$\mathrm{P}(t_1)=\mathrm{P}(t_2)$，$(t_1 \neq t_2)$ 満たす点があれば，この点を曲線の重複点といいますが，重複点がない曲線が単一曲線です．単一曲線の場合実数 t と点 $\mathrm{P}(t)$ の間に 1 対 1 の連続対応があるわけです．

［例］(2.3)〜(2.5) は単一閉曲線であり，(2.6) は単一曲線ではありません．

単一閉曲線 (Jordan 曲線ともいいます) は平面を内部，外部，境界 (曲線) の 3 つの部分に分けます．

(これも定理で Jordan の曲線定理といいます)
内部は曲線で囲まれた有界な領域です．

単一閉曲線上の点 $P(t)$ が t の増加とともに曲線の内部を右手に見て回るとき，この曲線は **右回り** であるといいます．左回りについても同様に定義します．単一閉曲線は右回り，左回りのいずれかです．

(2.3)，(2.5) は左回り，(2.4) は右回りです．(2.6) は単一曲線ではありませんが，左回りの単一閉曲線と右回りの単一閉曲線を結合したものとみなせます．

なお，単一閉曲線はすべて円周 (2.3) または (2.4) の位相的写像と考えられます．

単一閉曲線上のどの 2 点を結ぶ線分も外部の点を含まないとき，この曲線を **凸閉曲線** (卵形線) といいます．(2.3)，(2.4) は凸閉曲線であり，(2.5) は凸閉曲線ではありません．

§3. 単一閉曲線が囲む図形の面積

面積を求める際定積分を使いますので，以下では，条件に微分可能性を追加します．

単一閉曲線 C を

$C=\{P(x,\ y)\,|\,x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\leqq t\leqq\beta\}$

$(x(t),\ y(t))$ は $\alpha\leqq t\leqq\beta$ で連続で，有限個の点を除き微分可能で $x'(t)$，$y'(t)$ は連続)　(3.1)

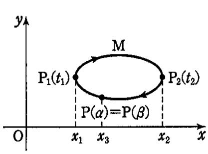
とし，C が囲む図形の面積を S とします．

一般に，$x(t)$，$y(t)$ が (3.1) の (　) 内の条件を満たす曲線を **区分的に滑らかな曲線** と呼びます．

C 上の 2 点 $P_1(t_1)$，$P_2(t_2)$ に対して，定積分

$\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt$ を C の **部分弧 P_1P_2 に関する $y(t)x'(t)$ の積分** と呼びます．また，必要に応じて (前後から意味が明らかなときに限り)，この定積分を単に $\int_{P_1P_2}$ と書きます．

(i)　C が凸で右回りの場合



$x(t)$ は閉区間 $\alpha\leqq t\leqq\beta$ で連続だから，最小値 $x_1(t_1)$ と最大値 $x_2(t_2)$ をもちます．$\alpha<t_1<t_2<\beta$ と仮定します．このとき，C が凸で右回りであることから $x(t)$ は区間 $[t_1,\ t_2]$ で単調に増加し，$[\alpha,\ t_1]$ と $[t_2,\ \beta]$ で単調に減少します．したがって，左下図のようになります．図で，点が P_1 から P_2 まで動くとき，M は P_1 と P_2 の間の点とします．また，$x_3=x(\alpha)$ とします．

いま，弧 P_1MP_2 を表す方程式を　$y=f(x)$

弧 $P_1P(\alpha)P_2$ を表す方程式を　$y=g(x)$

とします．このとき，

$$
\begin{aligned}
S&=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx-\int_{x_1}^{x_2}g(x)dx\\
&=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx-\left(\int_{x_1}^{x_3}g(x)dx+\int_{x_3}^{x_2}g(x)dx\right)\\
&=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt\\
&\qquad-\left(\int_{t_1}^{\alpha}y(t)x'(t)dt+\int_{\beta}^{t_2}y(t)x'(t)dt\right)\\
&=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt+\int_{\alpha}^{t_1}y(t)x'(t)dt+\int_{t_2}^{\beta}y(t)x'(t)dt\\
&=\int_{\alpha}^{\beta}y(t)x'(t)dt \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

となります．

$\alpha<t_1<t_2<\beta$ と仮定しましたが，他の場合も (3.2) が成立します．

(ii)　C が凸で左回りの場合

(i)と同様にして

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}y(t)x'(t)dt \qquad (3.3)$$

を得ます．

(iii)　C が凹 (凸でない) 部分を含む場合

準備として，C と $-C$ に関する定積分の関係を調べます．

C の任意の部分弧を

$C_1=\{P(x,\ y)\,|\,x=x(t),\ y=y(t),\ t_1\leqq t\leqq t_2\}$

とすると，(2.2) より

$-C_1=\{Q(x,\ y)\,|\,x=x(-t),\ y=y(-t),\ -t_2\leqq t\leqq -t_1\}$

となります．

このとき，定積分

$$I=\int_{-t_2}^{-t_1}y(-t)\frac{dx(-t)}{dt}dt$$

において，$u=-t$ とおけば

$$I=\int_{t_2}^{t_1}y(u)\left(-\frac{dx(u)}{du}\right)(-du)$$

$$=\int_{t_2}^{t_1} y(u)\frac{dx(u)}{du}du$$
$$=-\int_{t_1}^{t_2} y(u)\frac{dx(u)}{du}du$$

u を t と書き換えて

$$I=-\int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx(t)}{dt}dt$$

を得ます．すなわち

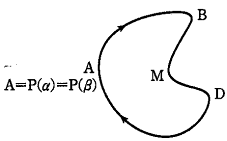
$$\int_{-t_2}^{-t_1} y(-t)\frac{dx(-t)}{dt}dt=-\int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx(t)}{dt}dt \qquad (3.4)$$

が成立します．このことから，一般に $-C$ に関する定積分は C に関する定積分の -1 倍であることがわかります．これを

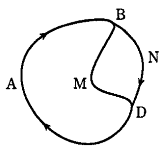
$$\int_{-C}=-\int_{C}$$

と書きます．

次に，曲線 C が下図のような凹の部分を含む場合を考えます．



この場合，次図のように B，D を適当な弧 BND でつないで，閉曲線 ABNDA が凸になるようにできます．



このとき

$$S=\int_{\mathrm{ABNDA}}-\int_{\mathrm{BNDMB}}$$
$$=\left(\int_{\mathrm{AB}}+\int_{\mathrm{BND}}+\int_{\mathrm{DA}}\right)-\left(\int_{\mathrm{BND}}+\int_{\mathrm{DMB}}\right)$$
$$=\left(\int_{\mathrm{AB}}+\int_{\mathrm{BND}}+\int_{\mathrm{DA}}\right)-\left(\int_{\mathrm{BND}}-\int_{\mathrm{BMD}}\right)$$
$$=\int_{\mathrm{AB}}+\int_{\mathrm{BMD}}+\int_{\mathrm{DA}}$$
$$=\int_{\mathrm{ABMDA}}$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$$

となって，(3.2) と同一の式になります．

以上のことから次の結果を得ます．

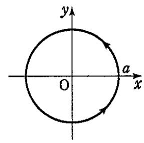
> 単一閉曲線 (3.1) が囲む図形の面積 S は
>
> 右回りの曲線ならば $S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$
>
> 左回りの曲線ならば $S=-\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$
>
> で与えられる．

§4. 例

(1) 円 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ $(a>0,\ 0\leqq t\leqq 2\pi)$ の面積 S

左回りですから

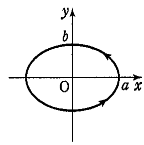
$$S=-\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$
$$=\pi a^2$$



(2) 楕円 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ $(a>0,\ b>0,\ 0\leqq t\leqq 2\pi)$ の面積 S

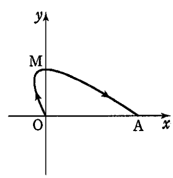
左回りですから

$$S=-\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt$$
$$=ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$
$$=\pi ab$$



(3) 放物線 $\begin{cases} x=t^2-2t \\ y=-t^2+4t \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 4)$ と x 軸で囲まれる図形の面積 S

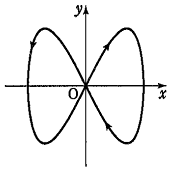
弧 OMA に **有向線分 AO を結合して** できる右回りの閉曲線を考えます．部分弧 AO に関する積分において　$y=0$ ですから，



$$S=\int_{\mathrm{OMA}}+\int_{\mathrm{AO}}$$
$$=\int_{\mathrm{OMA}}$$
$$=\int_0^4 y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_0^4(-t^2+4t)(2t-2)dt$$
$$=\frac{64}{3}$$

(4) リサージュ $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\sin 2t \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ の囲む面積S

これは単一閉曲線ではありませんが，左右対称で右半分は右回りですから



$$S=2\int_0^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=2\int_0^{\pi}\sin 2t\cos t\,dt$$
$$=\frac{8}{3}$$

§5. 線積分との関係

一般に区分的に滑らかな曲線

$C=\{\mathrm{P}(x,\ y)\,|\,x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\leqq t\leqq\beta\}$

が与えられているとします．ここでは，単一曲線であることも閉曲線であることも必要としません．また，x，y の関数 $F(x,\ y)$ (Cを含む領域内で連続)が与えられているとします．このとき，定積分

$$\int_\alpha^\beta F(x(t),\ y(t))x'(t)dt \qquad (5.1)$$

を **$F(x,\ y)$ の C 上の x に関する線積分** と定義し，単に $\int_C F(x,\ y)dx$ と書きます．

y に関する線積分も同様に定義します．

(5.1) で特に，$F(x,\ y)=y$ としたものが面積の公式で使われた定積分です．向きに注意すると

$$\int_C ydx=-\int_C xdy$$

であることが分かりますから，(3.1) で与えられたCが右回りのときはCが囲む図形の面積をSとすると

$$S=\int_C ydx=-\int_C xdy$$

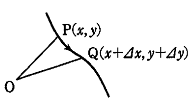
となります．よって，

$$S=\frac{1}{2}\int_C(ydx-xdy) \qquad (5.2)$$

とかくことができます．

(5.2) は直接次のように証明することもできます．

右図のような場合

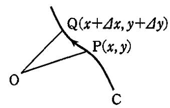


Oを原点として

$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}(y\Delta x-x\Delta y)$

が成立し，

また，右図のような場合



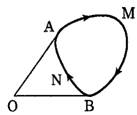
$\triangle\mathrm{OPQ}=-\frac{1}{2}(y\Delta x-x\Delta y)$

が成立します．

したがって，下図のような場合，区分求積の考えにより

$S=$(図形OAMBOの面積)$-$(図形OANBOの面積)

$$=\frac{1}{2}\int_{\mathrm{AMB}}(ydx-xdy)-\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathrm{BNA}}(ydx-xdy)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_C(ydx-xdy)$$



となり，(5.2) と一致します．

その他の図の場合も同様です．

§6. おわりに

本稿は，筆者が本誌に発表させていただく10本目の小論になりますが，本稿を含めて10本とも「高校の数学と大学の数学のすきま」を埋める題材を選んで執筆してきました．数研出版のホームページにも載っていますが，ご参考までにここに紹介させていただきます．③は本稿とも関係しています．

① 石濱文武，微分方程式の指導上の問題点　数研通信 NO. 4,1988
② 平均値の定理の θ の極限　NO. 8,1990
③ 曲率を使って放物線の頂点を求める　NO. 26, 1996
④ f と f^{-1} のグラフの共有点の個数について　NO. 32,1998
⑤ アポロニウスの円の中心について　NO. 33, 1998
⑥ 楕円曲線上のある群について　NO. 38,2000
⑦ A^n の公式の統一について　NO. 40,2001
⑧ 行列の標準化について　NO. 41,2001
⑨ 行列 n 次方程式の解法について　NO. 43,2002

《参　考　文　献》

[1] 高木貞治，解析概論，岩波書店
[2] *L.V.Ahlfors, Complex Analysis, McGraw—Hill Book Company*
[3] 小林昭七，曲線と曲面の微分幾何，裳華房

(神奈川県立湘南高等学校非常勤講師)