$W_{n+1}=nW_n+nW_{n-1}$ の別証

森島(もりしま)　充(みつる)

> n 個の異なるものの完全順列を W_n 通りとすると，
> $W_1=0$，$W_2=1$
> $W_{n+1}=nW_n+nW_{n-1}$　$(n\geqq 2)$
> が成り立つ．

(準備)

まず，1から9までの自然数について普通の順列を考えてみましょう．例えば

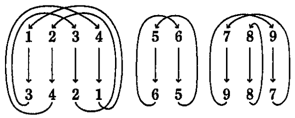
3，4，2，1，6，5，9，8，7

がその1つですが，これと1，2，……，9を並べて次のように上の段から下の段への写像として見ると

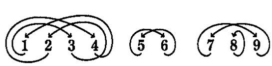
$$\begin{array}{ccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&4&2&1&6&5&9&8&7\end{array}$$

という写像が作れます．元の順列が9! 通りですから，この写像も9! 通り作れます．この写像はつまり，集合$\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 9\}$から自分自身への1対1対応の写像を意味します．

さて，この写像を次のようにつなげてみましょう．



するといくつかのループができます．さらにこれを次のように略記することにします．



これらのループの作り方も先程の写像と1対1に対応します．つまり順列を考えるという事は，このようなループをどう作るかという事に対応することになります．これらのループは書き直すと結局

$1\to3\to2\to4$　$5\to6$　$7\to9$　8

ということですが，1つのループに含まれる数字の個数をそのループの「長さ」と呼ぶことにします．上の場合，ループの長さは順に4，2，2，1です．また，この順列によって定まる写像を σ とすると，1つ目のループより

$\sigma(1)=3$，$\sigma(\sigma(1))=2$，$\sigma(\sigma(\sigma(1)))=4$，
$\sigma(\sigma(\sigma(\sigma(1))))=1$

となりますが，これは簡単のために

$\sigma(1)=3$，$\sigma^2(1)=2$，$\sigma^3(1)=4$，$\sigma^4(1)=1$

と書くことにしましょう．(ついでに $\sigma^0=id$ とします) このとき残りのループから同様に

$\sigma(5)=6$，$\sigma^2(5)=5$
$\sigma(7)=9$，$\sigma^2(7)=7$
$\sigma(8)=8$

となります．また最初のループについて $\sigma^4(1)=1$ でしたが，「スタート」を変えると

$\sigma^4(2)=2$，$\sigma^4(3)=3$，$\sigma^4(4)=4$

である事が分かります．

以上は最初の例についての話ですが，一般に1から9までの自然数についてどんな順列を考えても個々の数字は必ず1つのループに含まれています．そしてその長さは最大で9，最小で1です．さらにこの順列を完全順列に限定して，ある1つの完全順列について考えてみると，そこには長さ1のループは存在しません．なぜなら例えば9を含むループの長さが1ということは $\sigma(9)=9$，つまり「9」が9番目にあるという事で，これは「完全」に反するからです．考えているのは1から9の数字の完全順列ですから，この事はさらに長さ8のループも存在しない事を意味します．もし長さ8のループがあれば残りは1個ですからその数字は長さ1のループにならざるを得ないからです．――これをベースに n 個の場合を考えてみます．

(証明)

n を有限な自然数として，$(1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$ の

ある入れかえを$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \cdots\cdots, \sigma(n))$とおく．$\sigma$は入れかえなので，集合$\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n\}$から自分自身への全単射とする．このとき，集合$L=\{n, \sigma(n), \sigma^2(n), \sigma^3(n), \cdots\cdots\}$を考えるとこれは有限集合$\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n\}$の部分集合なので$L$も有限集合．したがって$\sigma^j(n)=\sigma^i(n)$となる$i, j$ $(0 \leqq i < j)$が存在する（ただし$\sigma^0(n)=n$と定義する）．このときσは単射なので$\sigma^{j-i}(n)=\sigma^0(n)$であり，$k=j-i$とおくと，これは$\sigma^k(n)=n$となる$k\,(k>0)$が存在することを意味する．そのような$k$の最小のものを$l$とおくと集合$L$は$\{n, \sigma(n), \sigma^2(n), \cdots\cdots, \sigma^{l-1}(n)\}$とかける．この集合を順序を含めて，入れかえ$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \cdots\cdots, \sigma(n))$における$n$を含む長さ$l$のループと呼び，略して$(n, l)$ループとかくことにする．さて，$(1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$の$n!$通りの入れかえの全てについて，一般に$(n, l)$ループの$l$は$l=1$から$l=n$のいずれかである．そして$(n, l)$ループのでき方は$\sigma(n), \sigma^2(n), \sigma^3(n), \cdots\cdots, \sigma^{l-1}(n)$を次々に決めていくことを考えると${}_{n-1}\mathrm{P}_{l-1}$通りある．以上は任意の入れかえ，すなわち普通の順列についての話である．

さて，以下は完全順列に限定して考える．つまり，任意のmについて$\sigma(m) \neq m$である，という条件を加える．この時$\sigma(n) \neq n$だから$(n, 1)$ループを持つ入れかえは存在しない．一方$2 \leqq l \leqq n$の時(n, l)ループに含まれる数はすでに完全順列になっているので，その入れかえが完全順列であるためには(n, l)ループに含まれていない数が完全順列になっている事が必要かつ十分な条件である．これより$(n, n-1)$ループをもつ入れかえも存在しない事が分かる．したがって

A．$n=1$のとき

完全順列とはなり得ないので　$W_1=0$

B．$n=2$のとき

$(2, 2)$ループをもつ入れかえのみなので

$$W_2={}_1\mathrm{P}_1=1$$

C．$n=3$のとき

$(3, 3)$ループをもつ入れかえのみなので

$$W_3={}_2\mathrm{P}_2=2$$

D．$n=4$のとき

$(4, 2)$ループまたは$(4, 4)$ループをもつ入れかえのみを考えればよい．$(4, 2)$ループのでき方が${}_3\mathrm{P}_1=3$通りで，このループに含まれない2つの数が完全順列で$W_2=1$通り．

一方，$(4, 4)$ループのでき方が${}_3\mathrm{P}_3=6$通り．

したがって　$W_4={}_3\mathrm{P}_1 W_2+{}_3\mathrm{P}_3=3\times1+6=9$

E．$n \geqq 4$のとき

(n, l)ループ$(l=2, 3, 4, \cdots\cdots, n-2, n)$をもつ入れかえを考えればよい．Dと同様にして

$$W_n={}_{n-1}\mathrm{P}_1 W_{n-2}+{}_{n-1}\mathrm{P}_2 W_{n-3}+\cdots\cdots +{}_{n-1}\mathrm{P}_{n-3} W_2+{}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}$$

さらに

$$W_{n+1}={}_n\mathrm{P}_1 W_{n-1}+{}_n\mathrm{P}_2 W_{n-2}+\cdots\cdots +{}_n\mathrm{P}_{n-2} W_2+{}_n\mathrm{P}_n$$

したがって

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= nW_{n-1}+n_{n-1}\mathrm{P}_1 W_{n-2}+\cdots\cdots +n_{n-1}\mathrm{P}_{n-3} W_2+n_{n-1}\mathrm{P}_{n-1} \\ &= nW_{n-1}+n({}_{n-1}\mathrm{P}_1 W_{n-2}+\cdots\cdots +{}_{n-1}\mathrm{P}_{n-3} W_2+{}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}) \\ &= nW_{n-1}+nW_n \end{aligned}$$

よって，A，B，Cより　$W_3=2W_2+2W_1$

B，C，Dより　$W_4=3W_3+3W_2$

Eより　$W_{n+1}=nW_n+nW_{n-1}\quad(n \geqq 4)$

すなわち　$W_{n+1}=nW_n+nW_{n-1}\quad(n \geqq 2)$

(補足)

数研通信は「オリジナルなものを…」という主旨ですが，(準備)，(証明)共にループを定義するあたりまでは「巡回置換(サイクル)」という名前で代数の入門テキストには必ず載っています．だから，オリジナルとは程遠いものなのですが，自分のイメージに沿って書いてみました．したがって，「正しい」表現ではないかもしれません．また，ループの定義以降もおそらくは代数の分野では周知の事だと思いますが，あえて自分の「再発見」を書かせていただきました．Eの後半はなかなか分からずに苦労したところです．御批判等お願い致します．

(謝辞)

本校数学科の佐々木先生には問題の紹介から内容に関するアドバイスに至るまで大変な御助力をいただきました．この場を借りてお礼申し上げます．

(東京都立国立高等学校)