「必要性，十分性」についての一考察

よねえ　よしのり
米江　慶典

1．はじめに

「必要性，十分性」は数学全般の定理，考え方の根底に流れる内容です．しかし，授業で問題を解説する際，曖昧にされている場合が多いと感じます．

また反対に，教科書，参考書において，「同値」としてもよいと思われる所に，「逆にこのとき～」という記述がある場合もいくつか見受けられます．今回私は，こちらの方に着目し，「同値」で終わらせてよいと考えられる問題を2種類考えてみました．

2．準備

まずは定義と定理の準備から始めます．

（定義）

> 2つの条件 p，q において，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき
> 　q は p であるための必要条件である
> 　p は q であるための十分条件である　という．
> 命題 $p \Longrightarrow q$ とその逆 $q \Longrightarrow p$ がともに真であるとき，すなわち，$p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき
> 　q は p であるための必要十分条件である
> という．この場合，p は q であるための必要十分条件でもある．また，このとき，p と q とは互いに同値であるともいう．

（定理１）

> 連続関数 $g(x)$，$h(x)$ $(\neq 0)$ に対して，次の(1)，(2)が成り立つ．ただし，C は定数とする．
>
> (1)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=C$，$\displaystyle\lim_{x\to a}h(x)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to a}g(x)=0$
>
> (2)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=C\ (\neq 0)$，$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$
> $$\Longrightarrow \lim_{x\to a}h(x)=0$$

（証明）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}\cdot h(x)$

$$=\left(\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}h(x)\right)=C\cdot 0=0$$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{g(x)}{h(x)}}=\frac{\lim_{x\to a}g(x)}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}}=\frac{0}{C}=0$

（証明おわり）

定理1において $C\neq 0$ とすると，ただちに次の系1を得ます．

（系１）

> 連続関数 $g(x)$，$h(x)(\neq 0)$ および定数 $C(\neq 0)$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=C$ とする．このとき，次が成り立つ．　$\displaystyle\lim_{x\to a}h(x)=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}g(x)=0$

定理1および系1において，$x\to a$ の代わりに $x\to\pm\infty$ としても成り立ちます．

（定理２）

> 行列 A，X，O に対して
> $$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ とする．$$
> このとき，次が成り立つ．
> 方程式 $AX=O$ が $X=O$ 以外の解をもつ
> $$\Longleftrightarrow \det A=0.$$
> ただし，$\det A=ad-bc$ とする．

（証明）

$(\Longrightarrow)$　$\det A\neq 0$ とすると，A^{-1} が存在するので方程式 $AX=O$ の両辺に左から A^{-1} をかけると $X=O$ となり仮定に矛盾する．

よって，$\det A=0$．

$(\Longleftarrow)$　$AX=O \Longleftrightarrow \begin{cases} ax+by=0 & \cdots\cdots ① \\ cx+dy=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

である．仮定より，$\det A=0$ すなわち，$ad-bc=0$ のとき，①式と②式は同値である．

よって，解は $ax+by=0$ を満たすすべての $(x,\ y)$ の組である．　　（証明おわり）

3. 考察問題

参考文献[2]から抜粋した2つの問題について考えます.

(問題1) 極限からの係数決定

> 次の等式が成り立つように定数 a, b の値を定めよ.
>
> $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=2$ (福岡大)

(指針)

$\displaystyle\lim_{x\to4}(x-4)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to4}(a\sqrt{x}+b)\neq0$ とすると極限値が存在しない. したがって $\displaystyle\lim_{x\to4}(a\sqrt{x}+b)=0$ であることが必要条件. これから, 例えば b を a で表し, 等式を満たす a, b の値を求める.

逆に, このとき等式が成り立つ(十分条件である)ことを確かめる.

(模範解答)

$\displaystyle\lim_{x\to4}(x-4)=0$ であるから, 極限値が存在するためには $\displaystyle\lim_{x\to4}(a\sqrt{x}+b)=0$ であることが必要.

ゆえに $2a+b=0$ よって $b=-2a$ …… ①

このとき

$$\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}-2a}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{a(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\lim_{x\to4}\frac{a}{\sqrt{x}+2}=\frac{a}{4}$$

$\dfrac{a}{4}=2$ から $a=8$, ①から $b=-16$

逆にこのとき, 与式は成り立つ. (模範解答おわり)

以上が問題, 指針および模範解答ですが, 系1より, 次の解答1-1のように解答することができます.

(解答1-1)

$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=2\ (\neq0)$ なので極限値が存在している. よって, 系1より,

$\displaystyle\lim_{x\to4}(x-4)=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to4}(a\sqrt{x}+b)=0$.

ゆえに $2a+b=0$ よって $b=-2a$ …… ①

このとき

$$2=\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}-2a}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{a(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\lim_{x\to4}\frac{a}{\sqrt{x}+2}=\frac{a}{4}$$

$2=\dfrac{a}{4}$ から $a=8$, ①から $b=-16$

したがって, 定数 a, b の値は $a=8$, $b=-16$ である. (解答1-1おわり)

この解答1-1では系1を明らかに成り立つこととしているので, 一般的には次の解答1-2となるでしょう.

(解答1-2)

$\displaystyle\lim_{x\to4}(x-4)=0$ であるから, 極限値(2であってもそうでなくてもよい)が存在するためには $\displaystyle\lim_{x\to4}(a\sqrt{x}+b)=0$ であることが必要.

ゆえに $2a+b=0$ よって $b=-2a$ …… ①

このとき

$$\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}-2a}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{a(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\lim_{x\to4}\frac{a}{\sqrt{x}+2}=\frac{a}{4}$$

$\dfrac{a}{4}=2$ (十分) から $a=8$, ①から $b=-16$

したがって, 定数 a, b の値は $a=8$, $b=-16$ である. (解答1-2おわり)

以上のことから, 模範解答における「逆にこのとき, 与式は成り立つ.」の部分の記述は必要のないことがわかります.

(問題2) 連立方程式の解

> 連立方程式 $\begin{cases} ax+y=0 \\ (2a+3)x+ay=0 \end{cases}$ が $x=y=0$
>
> 以外の解をもつように, 定数 a の値を定めよ.

(解答2)

$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a+3 & a \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと, 連立方程式は $AX=O$ となる. よって, 題意の連立方程式が $x=y=0$ 以外の解をもつための必要十分条件は, $a\cdot a-1\cdot(2a+3)=0$ である.

したがって, $a^2-2a-3=0$ を解くと

$(a+1)(a-3)=0$ から $a=-1$, 3 である.

(解答2おわり)

なお, 参考文献[2]には解答の後半3行に以下の記述がありました.

「$a=-1$ のとき, 連立方程式は $x-y=0$ と同値, 例えば, $x=1$, $y=1$ が解. $a=3$ のとき, 連立方程式は $3x+y=0$ と同値, 例えば, $x=1$, $y=-3$ が

解．ゆえに，$a=-1$，3 のとき，連立方程式は $x=y=0$ 以外の解をもつ．」

4. おわりに

高校数学におけるなじみの深い問題について考えたわけですが，系 1，定理 2 を「明らかに成り立っていること」すなわち，「同値であること」とすれば，上述の解答 1-1，解答 2 のようになります．この場合，当然のことですが学習範囲のどの部分まで「明らかに成り立っていること (同値であること)」とするのかが問題になります．たとえば，回転体の体積における Pappus-Guldin の定理を明らかに成り立っていることとするのは少々度が過ぎるような気がします．(もちろん証明をつけて解答する場合は何ら問題はないです．) ご意見いただければ幸いです．

《参　考　文　献》

[1]『改訂版　高等学校　新編　数学A』数研出版
[2]『改訂版　チャート式　解法と演習　数学Ⅲ+C』荒木不二洋編　数研出版

(鳥取県立境高等学校)