$\cos 72^\circ$ の値を求めよう

神山(かみやま) 怜(さとし)

演習で「$z^5=1$ の解を求めよ」を解かせた.

$z^n=1$ の解は,複素数平面上で $z=1$ を1つの頂点とする正 n 角形の頂点である事を確認させる.

$z_1=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ 以下 72° 原点のまわりに回転させた複素数が $z^5=1$ の解である,にたどり着く.

「さて…,この $\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ を $a+bi$ の形で表すと,実数部分 $\cos 72^\circ$ の値は何だろう.」と問う.加法定理,半角,2倍角,3倍角の公式も当てはまらない.

「$x^5-1=0$ は $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

より

$x^4+x^3+x^2+x+1=0$

相反方程式 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}+1=0$ として」

解法1 を示す.

また,「$\theta=36^\circ$ とすると $3\theta=180^\circ-2\theta$ を利用して2倍角,3倍角の公式を利用する」**解法2** を示す.

更に,**解法3** を途中まで参考として示す.

「他にいくつかある.考えてみよう」と課題に出した.

数日たって次の**解法4,5,6** が届いた.

他にも考えられる.**解法7** 以降とそれらのバリエーションもある.

黄金分割に踏み込むと更に興味が拡がる.

以下,それらを紹介する.

解法1 $z=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ は

$x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の解である.

$x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ $(x^2\neq 0)$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$

ここで,$u=x+\dfrac{1}{x}$ とすると

$u^2+u-1=0$ より

$u=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

ここで,$u=x+x^{-1}$

$=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ+\cos(-72^\circ)$

$\quad +i\sin(-72^\circ)$

$=2\cos 72^\circ>0$

$\therefore$ $2\cos 72^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ より

$\cos 72^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

解法2 $\theta=36^\circ$ とすると $5\theta=180^\circ$ $(2\theta=72^\circ)$

$\therefore$ $3\theta=180^\circ-2\theta$

$\cos 3\theta=\cos(180^\circ-2\theta)=-\cos 2\theta$

$=-2\cos^2\theta+1$

3倍角の公式より

$4\cos^3\theta-3\cos\theta=-2\cos^2\theta+1$

$4\cos^3\theta+2\cos^2\theta-3\cos\theta-1=0$

$(\cos\theta+1)(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)=0$

$\cos\theta\neq-1$,$\cos\theta>0$ より

$\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}(=\cos 36^\circ)$

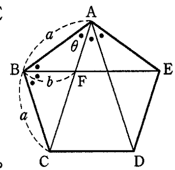
$\therefore$ $\cos 72^\circ=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$=2\times\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{16}-1$

$=\dfrac{-2+2\sqrt{5}}{8}$

$\therefore$ $\cos 72^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

解法3 正五角形ABCDEでは,辺と対角線のなす角が 36° である.



AB$=a$,BF$=b$,

AC$=x$,

△ACB∽△ABF だから

$$\frac{x}{a}=\frac{a}{b} \quad \therefore\ x=\frac{a^2}{b} \ \cdots\cdots ①$$

△ABC で正弦定理より

$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{x}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore\ x=\frac{a(3\sin\theta-4\sin^3\theta)}{\sin\theta}=a(3-4\sin^2\theta)$$

①より $\frac{a}{b}=3-4\sin^2\theta$ …… ②

また，△ABF で正弦定理より

$$\frac{b}{\sin\theta}=\frac{a}{\sin(180^\circ-2\theta)}$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta \ \cdots\cdots ③$$

②，③より

$$\therefore\ 3-4(1-\cos^2\theta)=2\cos\theta$$

$$4\cos^2\theta-2\cos-1=0$$

$$\therefore\ \cos\theta=\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad (\cos 36^\circ>0)$$

$$\cos 72^\circ=\cos(2\times 36^\circ)=2\cos^2\theta-1$$

$$=2\times\frac{6+2\sqrt{5}}{16}-1=\frac{3+\sqrt{5}-4}{4}$$

$$\therefore\ \cos 72^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

解法 4　$\theta=18^\circ$ とすると

$$\cos 54^\circ=\cos(90^\circ-36^\circ)=\sin 36^\circ$$

$$\therefore\ \cos 3\theta=\sin 2\theta$$

3 倍角，2 倍角の公式より

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$\cos\theta\neq 0$ より

$$4\cos^2\theta-3=2\sin\theta$$

$$4(1-\sin^2\theta)-3=2\sin\theta$$

$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$$

$$\sin\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad (\sin\theta=\sin 18^\circ>0)$$

$\sin 18^\circ=\sin(90^\circ-72^\circ)=\cos 72^\circ$ より

$$\cos 72^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

解法 5　$\theta=72^\circ$ とすると $5\theta=360^\circ$

$$4\theta=5\theta-\theta$$

$$\cos 4\theta=\cos(5\theta-\theta)=\cos(360^\circ-\theta)$$

$$=\cos\theta$$

ここで $\cos 4\theta=\cos 2\cdot 2\theta=2\cos^2 2\theta-1$

$$=2(2\cos^2\theta-1)^2-1$$

$$=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$$

$\therefore\ 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=\cos\theta$ となる。

因数分解すると

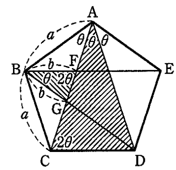
$$(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0$$

$\cos\theta\neq 1$，$\cos\theta\neq-\frac{1}{2}$ より

$$\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$\cos\theta>0$ より $\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

解法 6　図のように，正五角形の辺と対角線のなす角を θ とすると



$$\theta=36^\circ$$

また，$\mathrm{AB}=a$，

$\mathrm{BF}=\mathrm{BG}=b$，

$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{FG}=x-2b$ とする。

△BFG∽△ACD より

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GF}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}}$$

$$\therefore\ \frac{b}{x-2b}=\frac{x}{a}$$

$$\therefore\ x^2-2bx=ab \ \cdots\cdots ①$$

△ABF∽△ACB より $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BF}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}$

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{x}{a}$ から $bx=a^2$ …… ②

①と②より $x^3-2a^2x-a^3=0$

$$(x+a)(x^2-ax-a^2)=0$$

$$x\neq-a \qquad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}a$$

$x>0$ より $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$

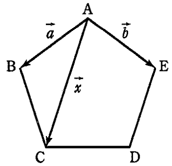
△ACD で余弦定理を用いると

$$\cos 2\theta=\frac{a^2+x^2-x^2}{2ax}$$

$$=\frac{a}{2x}=\frac{a}{2\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}a}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

解法 7　右図のように，1 辺 1 の正五角形に，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$ をとる．$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，AB∥EC だから，$\vec{x}=p\vec{a}+\vec{b}$ とおける．



$|\vec{x}|=d$ とすると

$$d^2=|\vec{x}|^2$$
$$=p^2|\vec{a}|^2+2p\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=p^2+2p\vec{a}\cdot\vec{b}+1 \quad \cdots\cdots ①$$

また，BE$=d$ だから

$$d^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1$$
$$=2(1-\vec{a}\cdot\vec{b}) \quad \cdots\cdots ②$$

また，CE$=d$，$d^2=|\vec{b}-\vec{x}|=|p\vec{a}|^2=p^2$ ……③

ここで，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおくと

①，③より $p^2+2pt+1=p^2$　∴ $2pt+1=0$

②，③より $p^2=2(1-t)$

この 2 式から $8t^3-8t^2+1=0$

$$(2t-1)(4t^2-2t-1)=0$$

$t\neq\dfrac{1}{2}$ だから $t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

ところで $t=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 108^\circ<0$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos 108^\circ=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

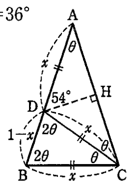
$\cos 108^\circ=\cos(180^\circ-72^\circ)=-\cos 72^\circ$ だから

$$\cos 72^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

解法 8　右図のように $\angle A=\theta=36^\circ$ とする二等辺三角形を考える．(AB＝AC＝1 とする)

AB 上に $\angle CDB=72^\circ=2\theta$ となる点Dをとると△ADC は二等辺三角形となる．

AD＝DC＝BC＝x とする．



(※D は AB を黄金分割した点)

△BCD で余弦定理を用いて

$$\cos 2\theta=\frac{x^2+(1-x)^2-x^2}{2x(1-x)}=\frac{1-x}{2x} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，△ABC∽△CDB より相似比をとると

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x} \quad \therefore\ x^2+x-1=0$$

$$\therefore\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (x>0)$$

これを①へ代入して，$\cos 2\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

解法 9　上の解法 8 で，①のあと x の長さの求め方はDから垂線 DH を下ろし

$\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ を求めて

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ とする方法もある．

解法 10　$\cos 36^\circ=x$，$\cos 72^\circ=y$ とすると

$$y=\cos 72^\circ=\cos(2\times 36^\circ)=2\cos^2 36^\circ-1$$
$$=2x^2-1 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$36^\circ=180^\circ-144^\circ=180^\circ-36^\circ\times 4$ より

$$x=\cos 36^\circ=\cos(180^\circ-144^\circ)=-\cos 144^\circ$$
$$=-\cos 2(2\times 36^\circ)$$
$$=-2\cos^2 72^\circ+1=-2y^2+1$$
$$\therefore\ x=-2y^2+1 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$y=2(-2y^2+1)^2-1=2(4y^4-4y^2+1)-1$$
$$\therefore\ 8y^4-8y^2-y+1=0$$
$$(y-1)(8y^3+8y^2-1)=0$$
$$(y-1)(2y+1)(4y^2+2y-1)=0$$

$y=\cos 72^\circ\neq 1,\ -\dfrac{1}{2}$ より $4y^2+2y-1=0$

を解いて

$y=\cos 72^\circ>0$ より $y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$$\therefore\ \cos 72^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

解法 6 で，BF：FE が黄金分割であること，**解法 8** で，AD：DB が黄金分割であることを利用するとバリエーションが生まれる．

解法 7 のベクトルは，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めたが，p の値を求めることからもバリエーションが生まれる．

(元 栃木県立栃木女子高等学校)